第6章　数の表現

この章では，現在の計算機で使用されている2進法の演算方法に慣れるため，特に負数に関してどのような表示の仕方をするのか，また負数を含んだ四則演算法について学ぶ．

6.1　10進法と2進法

人間が大昔から10進法に親しんできたのは，指が10本あることから始まっている．一人の手が数えられる最大の指の数は10本，これが不足した時は，隣人の指を借りてきて，**指の数**は20本となり，3人で30本となり，10の位の概念ができた．

有史以前からアラビアでは建築手法にも10進法が使われていた．すなわち，長さや距離の測定に使用されていた．しかしながら，この現代でもアフリカでは10本以上になるとたくさんの数というだけで，それ以上の数を数えない民族もある．それは生活に必要がないからである．

周知のように10進数で使用する数字は0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9の10種類であり，10進法で$1998_{(10)}$を表すのに，$1998=(1\times1000)+(9\times100)+(9\times10)+(8\times1)$のように表され，これを一般的に

$$a_3\times10^3+a_2\times10^2+a_1\times10^1+a_0\times10^0$$

と表し，a_iを仮数(0〜9)，10のべき乗の数字を重み，10を基数(radix)といっている．そして，最も左側の仮数をMSD (Most Significant Digit)，最も右側の仮数をLSD (Least Significant Digit)という．

本書では，煩雑性を防ぐためにn進数の数字や記号を表すのに$****_{(n)}$としている．

一方，電気的にこの演算を取り扱う時には2進法で行う．これは電気的に

“H”レベル，“L”レベルまたは“ON”，“OFF”を“1”，“0”に対応させて計算している．

これに対応して，2進数で$10_{(10)}$の数字は

$$10=8+0+2+0=1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+0\times2^0$$

となり，$1010_{(2)}$と表され，特に2進数の1桁をビット(bit : binary digit の略)といっている．また，特に2進数の場合，MSDをMSB(Most Significant Bit)，LSDをLSB(Least Significant Bit)という．

それでは小数点以下はどのように表すか．

$$2^{-1}=0.5,\qquad 2^{-2}=0.25,\qquad 2^{-3}=0.125$$

であるから，小数点以下を表す場合は，半分ずつ割っていけばよいことになる．このように，一般にはrを基数としたr進数の各桁は

$$b_{n-1}r^{n-1}+b_{n-2}r^{n-2}+\cdots+b_1r^1+b_0r^0+b_{-1}r^{-1}+b_{-2}r^{-2}+\cdots+b_{-(n-1)}r^{-(n-1)}$$

として表され，この式の仮数b_iは$0\leqq b_i<r-1$の値をもつことになる．

それでは，なぜ，2進法がよいのだろうか．それは電気的な“ON”，“OFF”が単純に2進数に対応しているだけであろうか．

1970年代には，10進数を計算機で取り扱うのには何進数がよいのかの議論がなされていた．今，10進数n桁の扱いうる数は10^nで，これをr進数m桁で表すには，$r^m\geqq10^n$なる関係より$m=[n/(\log_{10}r)]$で，mは整数で[ ]内で表された小数点以下を切り捨てた整数に1を加えた整数(桁数)である．この時に必要な情報演算数は桁数mと，表される数字(進数)の数rのかけ算であるから，$P=m\times r$で表され，nを一定とした時に，この値が最小ならば効率のよい演算，すなわち演算速度が速いシステムができる．Pを最小とするためには$\log_{10}r/r$が最大となる値である．

すなわち，

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\log_{10}r}{r}\right)=\frac{\log_{10}e-\log_{10}r}{r^2}=0$$

であり，故に$r=e\,(2.718\cdots)$となる．

したがって，$e=2.7\cdots$に近い整数値が一番計算速度が速いといわれたために3値論理の研究が行われた．しかしながら，“+1”，“0”，“−1”の中間値“0”が電子素子(トランジスタ)で実現すると不安定な動作をするために，2値の

方に軍配が上がった.

今のことを簡単に説明するために，10 進数で $25_{(10)}$ という数字を考えてみよう．これを 2 進数で表すと，$\mathbf{11001_{(2)}}$ $(=1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+1\times2^0)$ となり，P=5 桁 ×2 種数字 =**10**，これを 3 進数で表すと，$\mathbf{221_{(3)}}$ $(=2\times3^2+2\times3^1+1\times3^0)$ となり，P=3 桁 ×3 種数字=**9**，さらに 4 進数で表すと，$\mathbf{121_{(4)}}$ $(=1\times4^2+2\times4^1+1\times4^0)$ となり，P=3 桁 ×4 種数字=**12**，10 進数では P=2 桁 ×10 種数字=**20** となり，この例えでも情報演算数 P が最小となる 3 進数が計算機で行わせるのに最適であることがわかるであろう.

6.2 進数変換法

6.2.1 2進数表示 (binary number system)

2 進数を 10 進数に変換するには，

2 進数 $b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1b_0.b_{-1}b_{-2}\cdots b_{-m}$ は，2 のべき乗の数字であるので，これを 10 進数に変換するには，n+m 桁の 2 進数は

$$b_{n-1}2^{n-1}+b_{n-2}2^{n-2}+\cdots+b_12^1+b_02^0+b_{-1}2^{-1}+b_{-2}2^{-2}+\cdots+b_m2^m$$

を計算すれば，10 進数が求まる.

2進数の重み	16	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8	1/16
2のべき数	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}

例 1　2 進数 $1101.101_{(2)}$ を 10 進数に変換しなさい.

解答

$$1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0+1\times2^{-1}+0\times2^{-2}+1\times2^{-3}=8+4+1+0.5+0.125$$
$$=13.625_{(10)}$$

10 進数を 2 進数に変換するには，

例1で小数点以上の数字13は，$13_{(10)}=2\times(2\times(2\times1+1)+0)+1$ で構成されているから，整数10進数は2で割って，余りを次々と求めていけばよい．すなわち，

$$\begin{array}{r|ll} 2 & 13 & \text{余り} \\ \hline 2 & 6 & 1 \Rightarrow \mathrm{LSB}(b_0) \\ \hline 2 & 3 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 \Rightarrow \mathrm{MSB}(b_3) \end{array} \Bigg) \; 1101_{(2)}$$

となる．

例 2　整数 10 進数 $100_{(10)}$ を 2 進数に変換しなさい．

解答

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 100 & \text{余り} & \\ \hline 2 & 50 & 0 \Rightarrow \mathrm{LSB} & (b_0) \\ \hline 2 & 25 & 0 & (b_1) \\ \hline 2 & 12 & 1 & (b_2) \\ \hline 2 & 6 & 0 & (b_3) \\ \hline 2 & 3 & 0 & (b_4) \\ \hline 2 & 1 & 1 & (b_5) \\ \hline & 0 & 1 \Rightarrow \mathrm{MSB} & (b_6) \end{array} \Bigg) \; 1100100_{(2)}$$

例 1 で小数点以下の 0.625 は $0.625_{(10)}=2^{-1}\times(\mathbf{1}+2^{-1}(\mathbf{0}+2^{-1}\times\mathbf{1}))$ で構成されているから小数 10 進数は 2 を乗算して，1 の位に生じた“1”か“0”を求めていけばよい．すなわち，

$$0.625\times2=1.25=\mathbf{1}+0.25$$

$$0.25\times2=0.5=\mathbf{0}+0.5$$

$$0.5\times2=1.0=\mathbf{1}+0.0$$

となり，$1101.\mathbf{101}_{(2)}$ と表されることになる．

例 3　小数 10 進数 $0.6875_{(10)}$ を 2 進数で表しなさい．

解答

$$\left.\begin{array}{l} 0.6875\times2=1.375=1+0.375 \Rightarrow \mathrm{MSB} \\ 0.375\times2=0.75=0+0.75 \\ 0.75\times2=1.5=1+0.5 \\ 0.5\times2=1=1+0 \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \mathrm{LSB} \end{array}\right) \; 0.1011_{(2)}$$

6.2.2 8進数表示 (octal number system)

2 進数で表すと桁数が多くなり，大変なので 8 進数や 16 進数が実際のコンピュータに使用されている．

8 進法では 0～7 までの数字を取り扱い，たとえば，8 進数 $1234_{(8)}$ を 10 進数に変換するには

$$1234_{(8)}=1\times8^3+2\times8^2+3\times8^1+4\times8^0=668_{(10)}$$

となる．

8 進数の重み	512	64	8	1	1/8	1/64	1/512
8 のべき数	8^3	8^2	8^1	8^0	8^{-1}	8^{-2}	8^{-3}

10 進数を 8 進数に変換するには，整数部分では 2 進数と同様に 2 で割っていき，2 進数の 3 桁ずつのグループに分ければよい．

$$668_{(10)} \Rightarrow \underbrace{001}_{1}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{011}_{3}\ \underbrace{100}_{4_{(8)}}{}_{(2)}$$

$$\begin{array}{r|r l l}
2 & 668 & 0 & \\
2 & 334 & 0 & 4 \\
2 & 167 & 1 & \\
2 & 83 & 1 & \\
2 & 41 & 1 & 3 \\
2 & 20 & 0 & \\
2 & 10 & 0 & \\
2 & 5 & 1 & 2 \\
2 & 2 & 0 & \\
2 & 1 & 1 & 1 \\
 & 0 & &
\end{array}$$

小数点以下の場合は，2 進数と同様に 2 を掛けていき，小数点を超える数字を求め，3 桁ずつのグループに分ける．

例 4　10 進数 $0.75_{(10)}$ を 8 進数に変換しなさい．

解答　$0.75\times2=1.5=1+0.5$、$0.5\times2=1.0=1+0$

$$0.75_{(10)} \Rightarrow 0.\underbrace{110}_{0.6_{(8)}}{}_{(2)}$$

6.2.3 16 進数表示 (hexadecimal number system)

表 6.1 に 10 進数と 2 進数と 16 進数との関係を示す．16 進数では，2 進数を 4 桁ずつにグループ分けをし，表 6.1 の表示に従って，数字化すればよい．

表 6.1 10 進数，2 進数，16 進数の関係

10進数	2 進数	16進数
0	0	0
1	1	1
2	10	2
3	11	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

たとえば，以下の 2 進数では

$$\begin{array}{cccccc} \underbrace{1010} & \underbrace{0011} & \underbrace{1111} & . & \underbrace{1100}_{(2)} \\ 10 & 3 & 15 & & 12_{(10)} \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathrm{A} & 3 & \mathrm{F} & . & \mathrm{C}_{(16)} \end{array}$$

となる．この反対の方法を行うには，たとえば，$\mathrm{A3F.C}_{(16)}$ を 10 進数に変換する場合は，

$$10\times16^2+3\times16^1+15\times16^0+12\times16^{-1}=2560+48+15+0.75=2623.75_{(10)}$$

となる．

例 5 10 進数 $100_{(10)}$ を 16 進数で表しなさい．

解答 まず，2 進数に変換する．

$$100_{(10)} \Rightarrow \underbrace{0110}_{6}\ \underbrace{0100}_{4_{(16)}}{}_{(2)}$$

したがって，$100_{(10)} \to 64_{(16)}$ となる．

6.2.4　BCD 表示 (binary coded decimal code)

2 進符号化された 10 進符号を略して BCD 符号という．10 進数 1 桁を 2 進数 4 桁で表した符号である．

たとえば，

$$\begin{array}{ll} \text{10進数} & \text{BCD表示} \\ 13.48_{(10)} & \underbrace{0001}_{1}\ \underbrace{0011}_{3}.\underbrace{0100}_{4}\ \underbrace{1000}_{8_{(10)}}{}_{(BCD)} \end{array}$$

BCD 表示では $1010_{(2)}$〜$1111_{(2)}$ までの 10 進数の数字 $10_{(10)}$〜$15_{(10)}$ は取り扱わない．

例 6　$100_{(10)}$ を BCD で表しなさい．

解答　$100_{(10)} \rightarrow 0001\ 0000\ 0000_{(BCD)}$

6.3　2 進数の四則演算

6.3.1　加　算

通常の加算をすればよいが，1+0=1，0+1=1，0+0=0 となり，1+1 の場合のみ，1+1=10 となり，桁上げ「キャリー (carry)」が生じる．

$$\begin{array}{rcr} \text{整数} & & \\ 1111_{(2)} & \Rightarrow & 15_{(10)} \\ +1001_{(2)} & \Rightarrow & 9_{(10)} \\ \hline 11000_{(2)} & \Rightarrow & 24_{(10)} \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} \text{小数} & & \\ 1111.1101_{(2)} & \Rightarrow & 15.8125_{(10)} \\ +1001.0110_{(2)} & \Rightarrow & 9.375_{(10)} \\ \hline 11001.0011_{(2)} & \Rightarrow & 25.1875_{(10)} \end{array}$$

6.3.2　減　算

通常の減算と同じように 0−0=0，1−1=0，1−0=1 とすることができるが，0−1 の場合は，次の上の桁から "1" を借り「ボロウ (borrow)」てきて，10−1=1 とする．

$$\begin{array}{rcr} \text{整数} & & \\ 1100_{(2)} & \Rightarrow & 12_{(10)} \\ -\quad 11_{(2)} & \Rightarrow & 3_{(10)} \\ \hline 1001_{(2)} & \Rightarrow & 9_{(10)} \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} \text{小数} & & \\ 1100.010_{(2)} & \Rightarrow & 12.25_{(10)} \\ -\quad 11.111_{(2)} & \Rightarrow & 3.875_{(10)} \\ \hline 1000.011_{(2)} & \Rightarrow & 8.375_{(10)} \end{array}$$