

様々な組合せ子に対する逆書き換えの停止性と合流性*

岩見 宗弘^{1,a)}

受付日 2026年2月10日, 採録日 2026年5月20日

概要: Bergstra と Klop は, 組合せ子 S の非循環性と逆書き換えの停止性を示している. 本論文では, Bergstra と Klop の結果を, 様々な組合せ子に対し一般化した定理を与える. 最初に, この定理を用いてこれらの組合せ子に対する逆書き換えの停止性を示す. 次に, この定理が適用できない組合せ子に対し, 項書き換えシステムの枠組みを用いて, 逆書き換えの停止性を示す. 最後に, 様々な組合せ子に対して, 同じ枠組みを用いて, 逆書き換の合流性を反証する.

キーワード: 項書き換えシステム, 組合せ子論理, 逆書き換え, 停止性, 合流性

Termination and Confluence of Inverse Reductions for Several Combinators

MUNEHIRO IWAMI^{1,a)}

Received: February 10, 2026, Accepted: May 20, 2026

Abstract: Bergstra and Klop showed the acyclicity and termination of inverse reductions for the combinator S . In this paper, we give a generalized theorem for several combinators that extends their results. First, we show the termination of inverse reductions for these combinators by our theorem. Next, for combinators to which our theorem does not apply, we show termination by the term rewriting systems framework. Finally, we disprove the confluence of inverse reductions for several combinators by the same framework.

Keywords: term rewriting system, combinatory logic, inverse reduction, termination, confluence

1. はじめに

組合せ子論理と項書き換えシステムは, 等式に基づいた計算モデルである [5], [34]. 組合せ子論理はすべての計算可能な関数, すなわちプログラムを表現できる [4], [8]. 組合せ子は適用演算子を関数記号としてもつ適用項書き換えシステムとみなすことができる [18], [34]. また, 組合せ子は関数型プログラミング言語の効率的な実装に応用されている [28], [36]. これらの計算モデルにおいて, 停止性と合

流性は重要な性質である. 書き換えシステムの停止性は, すべての書き換えが停止して解が存在することを保証する. 書き換えシステムの合流性は, 解の一意性を保証する. ここで, 解とはそれ以上書き換えることができない項, すなわち, 正規形のことである.

組合せ子 $Oxy \rightarrow y(xy)$ は適用演算子を関数記号 $@$ として明記すると, 項書き換えシステム $R(O) = \{ @(@ (O, x), y) \rightarrow @(y, @(x, y)) \}$ として表すことができる. 組合せ子 O は停止性をもたないことが示されている [15], [19]. 本論文では, 書き換え規則が 1 つだけの項書き換えシステムを考える. 項書き換えシステムの停止性は, 直交かつ非消去な書き換え規則が 1 つであっても決定不能である [9]. 項書き換えシステムの合流性は, 平坦かつ非右線形な書き換え規則が 1 つであっても決定不能である [22].

組合せ子 $Lxy \rightarrow x(yy)$ の語の問題の決定可能性を示す際に, 逆書き換えを拡張した跳躍書き換えが重要な役割を

*本論文は以下の既発表論文をもとに発展させたものである. 岩見宗弘: 非消去かつ非消滅な組合せ子に対する逆書き換えの停止性と合流性, 日本ソフトウェア科学会第 42 回大会講演論文集, 1b-3-R, 2025.

¹ 岩手県立大学
Iwate Prefectural University, Takizawa, Iwate 020-0693, Japan

^{a)} iwami.m@iwate-pu.ac.jp

果たす [33]. 組合せ子 L の逆書き換えは停止性をもつが合流性をもたないため、逆書き換えでは L の語の問題の決定可能性を示すことはできない. このために、逆書き換えが合流性をもつように新しい書き換え規則を追加して、跳躍書き換えを定義し、この跳躍書き換えが停止性と合流性をもつことを示している. よって、組合せ子の語の問題の決定可能性を考えると、逆書き換えの停止性と合流性が役立つかもしれない. 本論文では、組合せ子 S, L 以外の逆書き換えの停止性と合流性を明らかにすることを目標とする.

文献 [6], [7] において、組合せ子 $Sxyz \rightarrow xz(yz)$ に対する非循環性と逆書き換えの停止性が示されている. さらに、文献 [15], [16] において、様々な組合せ子の非循環性が示されている. 本論文では、Bergstra と Klop の結果 [6], [7] を、様々な組合せ子に対し一般化した定理を与える. 最初に、この定理を用いてこれらの組合せ子に対する逆書き換えの停止性を示す. 次に、この定理が適用できない組合せ子に対し、項書き換えシステムの枠組みを用いて、逆書き換えの停止性を示す. 最後に、様々な組合せ子に対して、同じ枠組みを用いて、逆書き換えの合流性を反証する.

本論文で扱う組合せ子の書き換え規則と逆書き換えは表 1 にまとめる. 論文の結果は表 2 にまとめる. 表 1, 2 の組合せ子は文献 [31], [32] で紹介されているものである. 表 2 中の AProVE, TTT2, Mu-term は停止性検証ツールである [11], [21], [24]. CONF は CONFident の略記であり, ACP は ACP+CeTA の略記である. また, Hakusan は Hakusan と Hakusan+CeTA の略記である. さらに, G-CSI は Grackle CSI の略記である. CONFident, CSI, ACP+CeTA, Hakusan, Hakusan+CeTA, Grackle CSI は合流性検証ツールである [2], [12], [13], [20], [23], [38].

本論文の構成は以下の通りである. 第 2 節では、組合せ子論理と項書き換えシステムの定義や記法を述べる. 第 3 節では、組合せ子論理の枠組みを用いた組合せ子の逆書き換えの停止性について述べる. 第 4 節では、項書き換えシステムの枠組みを用いた組合せ子の逆書き換えの停止性について述べる. 第 5 節では、項書き換えシステムの枠組みを用いた組合せ子の逆書き換えの合流性について述べる. 第 6 節では、まとめと今後の課題について述べる.

2. 準備

本節では、組合せ子論理と項書き換えシステムの定義について述べる.

2.1 組合せ子論理

組合せ子論理については、文献 [5] の第 7 章、文献 [32] の第 18 章を参照していただきたい. 本節の定義は、文献 [15], [16] の第 2 節に基づいている. 組合せ子論理は、第 3 節で使用する.

以下では、記号 Z をある組合せ子とする. 変数の加

算無限集合を $\mathcal{V}$ とする ($\{Z\} \cap \mathcal{V} = \emptyset$). 組合せ子 Z 上の項の集合 $CL(Z, \mathcal{V})$ を次の通り帰納的に定義する: (1) $\mathcal{V} \subseteq CL(Z, \mathcal{V})$, (2) $Z \in CL(Z, \mathcal{V})$, (3) $s, t \in CL(Z, \mathcal{V})$ ならば $(st) \in CL(Z, \mathcal{V})$. 集合 $CL(Z, \mathcal{V})$ の項を Z -項という. また、変数を含まない Z -項を基礎 Z -項とよび、基礎 Z -項全体の集合を $CL(Z)$ で表す. Z -文脈、すなわち、0 個以上のホール $\square$ を含む Z -項の集合 $CL(\{Z, \square\}, \mathcal{V})$ を次の通り定義する: (1) $\mathcal{V} \subseteq CL(\{Z, \square\}, \mathcal{V})$, (2) $Z \in CL(\{Z, \square\}, \mathcal{V})$, (3) $\square \in CL(\{Z, \square\}, \mathcal{V})$, (4) $s, t \in CL(\{Z, \square\}, \mathcal{V})$ ならば $(st) \in CL(\{Z, \square\}, \mathcal{V})$. 1 つのホール $\square$ を含む Z -文脈を $C[\]$ で表す. $C[t]$ は Z -文脈 $C[\]$ のホール $\square$ を Z -項 t で置き換えた結果である. (st) は括弧を省略して、 st と書く. 括弧は左結合である、すなわち、 $s_1 s_2 \dots s_n$ は $(\dots (s_1 s_2) \dots s_n)$ を意味する. Z -項 t に含まれている変数の集合を $\mathcal{V}(t)$ と表す. 関数 $\sigma : \mathcal{V} \rightarrow CL(Z, \mathcal{V})$ の定義域 $dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{V} \mid \sigma(x) \neq x\}$ が有限であるものを代入という. 代入 σ を $\{x := \sigma(x) \mid x \in dom(\sigma)\}$ と表す. すべての代入 σ はある組合せ子 Z と Z -項 $t_1, \dots, t_n$ に対して、 $\sigma(Zt_1 \dots t_n) = Z\sigma(t_1) \dots \sigma(t_n)$ を満たす写像 $\sigma : CL(Z, \mathcal{V}) \rightarrow CL(Z, \mathcal{V})$ へ拡張できる. 以下では、 $\sigma(t)$ の代わりに $t\sigma$ という記法を使用する. 書き換え規則 $Zx_1 \dots x_n \rightarrow e$ は組合せ子 Z がもつ方向付けられた等式であり、次の条件を満たす: (1) 変数 $x_1, \dots, x_n$ は互いに相異なる、(2) $\mathcal{V}(e) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$. 書き換え規則 $Zx_1 \dots x_n \rightarrow e$ による $CL(Z, \mathcal{V})$ 上の書き換えまたはリダクション $\rightarrow_Z$ を次のように定義する: $s \rightarrow_Z t$ であるとき、かつそのときに限り、ある Z -文脈 $C[\]$, $u_1, \dots, u_n \in CL(Z, \mathcal{V})$ に対して、 $s = C[Zu_1 \dots u_n]$ かつ $t = C[e\{x_1 := u_1, \dots, x_n := u_n\}]$. このとき、 $Zu_1 \dots u_n$ を Z -リデックスという. $s \rightarrow_Z t$ の逆書き換えを $s \leftarrow_Z t$ と定義する. これを $t \rightarrow_Z^{-1} s$ と表す. 書き換え規則 $Zx_1 \dots x_n \rightarrow e$ に対して、 $\mathcal{V}(e) = \{x_1, \dots, x_n\}$ のとき、組合せ子 Z は非消去であるという. 書き換え規則 $Zx_1 \dots x_n \rightarrow e$ に対して、 $e \notin \mathcal{V}$ のとき、組合せ子 Z は非縮退であるという. 書き換え $\rightarrow_Z$ が無限書き換え列 $t_0 \rightarrow_Z t_1 \rightarrow_Z t_2 \rightarrow_Z \dots$ をもたないとき、停止性をもつという. 書き換え $\rightarrow_Z$ の反射推移的閉包を $\rightarrow_Z^*$ と表し、推移的閉包を $\rightarrow_Z^+$ と表す. 書き換え列 $t \rightarrow_Z^+ t$ を循環であるという. 書き換え $\rightarrow_Z$ が循環書き換えをもたないとき、組合せ子 Z は非循環性をもつという. 書き換え $\rightarrow_Z$ が、次の条件を満たすとき、合流性をもつという. 任意の $s, t, u \in CL(Z, \mathcal{V})$ に対して、 $u \leftarrow_Z^* s \rightarrow_Z^* t$ のとき $v \in CL(Z, \mathcal{V})$ が存在して $u \rightarrow_Z^* v \leftarrow_Z^* t$.

2.2 項書き換えシステム

本節の定義は文献 [17], [27], [34] に基づいている. 項書き換えシステムは第 4, 5 節で使用する.

関数記号の集合を Σ とし、変数の加算無限集合を $\mathcal{V}$ とす

表 1 組合せ子に対する書き換え規則と逆書き換え

Table 1 Rewrite rules and inverse reductions for combinators.

番号	組合せ子	書き換え規則	関数記号 @ を用いた逆書き換え
1	S	$Sxyz \rightarrow xz(yz)$	$@(@ (x, z), @ (y, z)) \rightarrow @ (@ (@ (S, x), y), z)$
2	L	$Lxy \rightarrow x(yy)$	$@ (x, @ (y, y)) \rightarrow @ (@ (L, x), y)$
3	O	$Oxy \rightarrow y(xy)$	$@ (y, @ (x, y)) \rightarrow @ (@ (O, x), y)$
4	J	$Jxyzw \rightarrow xy(xwz)$	$@ (@ (x, y), @ (@ (x, w), z)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (J, x), y), z), w)$
5	B	$Bxyz \rightarrow x(yz)$	$@ (x, @ (y, z)) \rightarrow @ (@ (@ (B, x), y), z)$
6	H	$Hxyz \rightarrow xyzzy$	$@ (@ (@ (x, y), z), y) \rightarrow @ (@ (@ (H, x), y), z)$
7	M	$Mx \rightarrow xx$	$@ (x, x) \rightarrow @ (M, x)$
8	W	$Wxy \rightarrow xyy$	$@ (@ (x, y), y) \rightarrow @ (@ (W, x), y)$
9	W^1	$W^1xy \rightarrow yxx$	$@ (@ (y, x), x) \rightarrow @ (@ (W^1, x), y)$
10	W^*	$W^*xyz \rightarrow xyzzz$	$@ (@ (@ (x, y), z), z) \rightarrow @ (@ (@ (W^*, x), y), z)$
11	W^{**}	$W^{**}xyzw \rightarrow xyzww$	$@ (@ (@ (@ (x, y), z), w), w) \rightarrow @ (@ (@ (@ (W^{**}, x), y), z), w)$
12	K	$Kxy \rightarrow x$	$x \rightarrow @ (@ (K, x), y)$
13	I	$Ix \rightarrow x$	$x \rightarrow @ (I, x)$
14	B_2	$B_2xyzw \rightarrow x(yzw)$	$@ (x, @ (@ (y, z), w)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (B_2, x), y), z), w)$
15	B_3	$B_3xyzwv \rightarrow x(yzwv)$	$@ (x, @ (@ (@ (y, z), w), v)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (@ (B_3, x), y), z), w), v)$
16	D_1	$D_1xyzwv \rightarrow xyz(wv)$	$@ (@ (@ (x, y), z), @ (w, v)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (@ (D_1, x), y), z), w), v)$
17	D_2	$D_2xyzw \rightarrow x(y(zw))$	$@ (x, @ (y, @ (z, w))) \rightarrow @ (@ (@ (@ (D_2, x), y), z), w)$
18	D_3	$D_3xyzwv \rightarrow x(yz)(wv)$	$@ (@ (x, @ (y, z)), @ (w, v)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (@ (D_3, x), y), z), w), v)$
19	$\hat{E}$	$\hat{E}xy_1y_2y_3z_1z_2z_3 \rightarrow x(y_1y_2y_3)(z_1z_2z_3)$	$@ (@ (x, @ (@ (y_1, y_2), y_3)), @ (@ (z_1, z_2), z_3)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (@ (@ (\hat{E}, x), y_1), y_2), y_3), z_1), z_2), z_3)$
20	Q_0	$Q_0xyzw \rightarrow xz(yw)$	$@ (@ (x, z), @ (y, w)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (Q_0, x), y), z), w)$
21	Q_2	$Q_2xyz \rightarrow y(zx)$	$@ (y, @ (z, x)) \rightarrow @ (@ (@ (Q_2, x), y), z)$
22	Q_4	$Q_4xyz \rightarrow z(yx)$	$@ (z, @ (y, x)) \rightarrow @ (@ (@ (Q_4, x), y), z)$
23	Q_5	$Q_5xyzw \rightarrow z(xyw)$	$@ (z, @ (@ (x, y), w)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (Q_5, x), y), z), w)$
24	Q_6	$Q_6xyzw \rightarrow w(xyz)$	$@ (w, @ (@ (x, y), z)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (Q_6, x), y), z), w)$
25	M_2	$M_2xy \rightarrow xy(xy)$	$@ (@ (x, y), @ (x, y)) \rightarrow @ (@ (M_2, x), y)$
26	P	$Pxyz \rightarrow z(xyz)$	$@ (z, @ (@ (x, y), z)) \rightarrow @ (@ (@ (P, x), y), z)$
27	P_1	$P_1xyz \rightarrow y(xxz)$	$@ (y, @ (@ (x, x), z)) \rightarrow @ (@ (@ (P_1, x), y), z)$
28	P_2	$P_2xyz \rightarrow x(yyz)$	$@ (x, @ (@ (y, y), z)) \rightarrow @ (@ (@ (P_2, x), y), z)$
29	P_3	$P_3xyz \rightarrow y(xzy)$	$@ (y, @ (@ (x, z), y)) \rightarrow @ (@ (@ (P_3, x), y), z)$
30	S_0	$S_0xyz \rightarrow xzyz$	$@ (@ (@ (x, z), y), z) \rightarrow @ (@ (@ (S_0, x), y), z)$
31	S'	$S'xyzw \rightarrow xywzw$	$@ (@ (@ (@ (x, y), w), z), w) \rightarrow @ (@ (@ (@ (S', x), y), z), w)$
32	Φ	$\Phi xyzw \rightarrow x(yw)(zw)$	$@ (@ (x, @ (y, w)), @ (z, w)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (\Phi, x), y), z), w)$
33	Φ_2	$\Phi_2xyzw_1w_2 \rightarrow x(yw_1w_2)(zw_1w_2)$	$@ (@ (x, @ (@ (y, w_1), w_2)), @ (@ (z, w_1), w_2)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (@ (\Phi_2, x), y), z), w_1), w_2)$
34	S_1	$S_1xyzw \rightarrow xyw(zw)$	$@ (@ (@ (x, y), w), @ (z, w)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (S_1, x), y), z), w)$
35	S_2	$S_2xyzw \rightarrow xzw(yzw)$	$@ (@ (@ (x, z), w), @ (@ (y, z), w)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (S_2, x), y), z), w)$
36	S_3	$S_3xyzwv \rightarrow xy(zv)(wv)$	$@ (@ (@ (x, y), @ (z, v)), @ (w, v)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (@ (S_3, x), y), z), w), v)$
37	L_1	$L_1xyz \rightarrow x(yyz)$	$@ (x, @ (@ (y, y), z)) \rightarrow @ (@ (@ (L_1, x), y), z)$
38	Γ	$\Gamma xy \rightarrow xy(\Gamma xy)$	$@ (@ (x, y), @ (@ (\Gamma, x), y)) \rightarrow @ (@ (\Gamma, x), y)$
39	e_1	$e_1xy \rightarrow xyx$	$@ (@ (x, y), x) \rightarrow @ (@ (e_1, x), y)$
40	e_2	$e_2xy \rightarrow yxy$	$@ (@ (y, x), y) \rightarrow @ (@ (e_2, x), y)$
41	S_4	$S_4xyzwv \rightarrow z(xwv)(ywv)$	$@ (@ (z, @ (@ (x, w), v)), @ (@ (y, w), v)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (@ (S_4, x), y), z), w), v)$
42	C_1	$C_1zxy \rightarrow z(xxy)(xyx)$	$@ (@ (z, @ (@ (x, y), y)), @ (@ (x, y), x)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (C_1, z), x), y)$
43	C_2	$C_2zxy \rightarrow z(xyxy)(xyx)$	$@ (@ (z, @ (@ (x, y), x)), @ (@ (y, x), y)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (C_2, z), x), y)$
44	$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}_1xyzw \rightarrow xz(yw)(xz)$	$@ (@ (@ (x, z), @ (y, w)), @ (x, z)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (\mathcal{D}_1, x), y), z), w)$
45	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_2xyzw \rightarrow xw(yz)(xw)$	$@ (@ (@ (x, w), @ (y, z)), @ (x, w)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (\mathcal{D}_2, x), y), z), w)$
46	α_1	$\alpha_1zxy \rightarrow x(yy)(zzxy)$	$@ (@ (x, @ (y, y)), @ (@ (@ (z, z), x), y)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (\alpha_1, z), x), y)$
47	α_2	$\alpha_2zwxxy \rightarrow w(yy)(zxy)$	$@ (@ (w, @ (y, y)), @ (@ (z, x), y)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (\alpha_2, z), w), x), y)$
48	N	$Nzxy \rightarrow z(Nxxy)(Nyxy)$	$@ (@ (z, @ (@ (@ (N, x), x), y)), @ (@ (@ (N, y), x), y)) \rightarrow @ (@ (@ (@ (N, z), x), y)$
49	s	$sxy \rightarrow x(sxy)(syx)$	$@ (@ (x, @ (@ (s, x), y)), @ (@ (s, y), x)) \rightarrow @ (@ (@ (s, x), y)$
50	M_3	$M_3xy \rightarrow xy(xy)(xy)$	$@ (@ (@ (x, y), @ (x, y)), @ (x, y)) \rightarrow @ (@ (M_3, x), y)$

表 2 組合せ子に対する逆書き換えの停止性と合流性

Table 2 Confluence and termination of inverse reductions for combinators.

番号	組合せ子	非循環性	停止性	合流性	停止性検証ツール			合流性検証ツール				
					AProVE	TTT2	Mu-term	CONF	CSI	ACP	Hakusan	G-CSI
1	S	○ [7]	○ [6], [7]	×	—	—	—	×	—	—	—	—
2	L	○ [15]	○ [33]	×	—	—	—	×	—	—	—	—
3	O	○ [15]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
4	J	○ [29]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
5	B	○ [14]	×	×	×	×	?	?	×	?	×	×
6	H	×	×	×	—	—	—	×	—	—	—	—
7	M	×	×	○	—	—	—	?	○	?	?	○
8	W	×	×	×	—	—	—	×	—	—	—	—
9	W ¹	×	×	×	—	—	—	×	—	—	—	—
10	W*	×	×	×	—	—	—	×	—	—	—	—
11	W**	×	×	×	—	—	—	×	—	—	—	—
12	K	○ [15]	×	?	—	—	—	?	?	?	?	?
13	I	○ [15]	×	?	—	—	—	?	?	?	?	?
14	B ₂	○ [16]	×	×	×	?	?	×	—	—	—	—
15	B ₃	○ [16]	?	×	?	?	?	×	—	—	—	—
16	D ₁	○ [16]	×	×	×	×	?	×	—	—	—	—
17	D ₂	○ [16]	?	×	?	?	?	×	—	—	—	—
18	D ₃	○ [16]	?	×	?	?	?	×	—	—	—	—
19	Ê	○ [16]	?	×	?	?	?	×	—	—	—	—
20	Q ₀	○ [16]	×	×	×	×	?	×	—	—	—	—
21	Q ₂	○ [16]	×	×	×	×	?	?	?	?	×	×
22	Q ₄	○ [16]	×	×	×	×	?	?	?	×	×	?
23	Q ₅	○ [16]	×	×	×	×	?	×	—	—	—	—
24	Q ₆	○ [16]	×	×	×	×	?	×	—	—	—	—
25	M ₂	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
26	P	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
27	P ₁	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
28	P ₂	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
29	P ₃	○	○	×	○	○	○	×	—	—	—	—
30	S ₀	×	×	×	—	—	—	×	—	—	—	—
31	S'	×	×	×	—	—	—	×	—	—	—	—
32	Φ	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
33	Φ ₂	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
34	S ₁	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
35	S ₂	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
36	S ₃	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
37	L ₁	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
38	Γ	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
39	e ₁	×	×	×	—	—	—	×	—	—	—	—
40	e ₂	×	×	×	—	—	—	×	—	—	—	—
41	S ₄	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
42	C ₁	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
43	C ₂	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
44	D ₁	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
45	D ₂	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
46	α ₁	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
47	α ₂	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
48	N	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
49	s	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—
50	M ₃	○ [16]	○	×	—	—	—	×	—	—	—	—

(○：成立 (本研究), ×：不成立 (本研究), ?：未解決, —：未実行)

る $(\Sigma \cap \mathcal{V} = \emptyset)$. 各関数記号は項数とよばれる 0 以上の自然数を備えている. 項数 0 の関数記号を定数とよぶ. 項数 n の関数記号の集合を Σ_n とする. Σ 上の項の集合 $T(\Sigma, \mathcal{V})$ を次の通り定義する: (1) $\mathcal{V} \subseteq T(\Sigma, \mathcal{V})$, (2) $f \in \Sigma_n$ かつ $t_1, \dots, t_n \in T(\Sigma, \mathcal{V})$ ならば $f(t_1, \dots, t_n) \in T(\Sigma, \mathcal{V})$. 変数を含まない項を基礎項とよぶ. 基礎項全体の集合を $T(\Sigma)$ により表す. $\square \notin \Sigma \cup \mathcal{V}$ を特別な定数記号とし, ホールとよぶ. 文脈は $T(\Sigma \cup \{\square\}, \mathcal{V})$ に属する項である. 文脈 C はホール $\square$ を唯一含むとき, $C[\]$ により表す. $C[t]$ は $C[\]$ のホールを t により置き換えた結果である. $t = C[s]$ のとき, s は t の部分項という. t に属する変数全体の集合を $\mathcal{V}(t)$ により表す. 各変数の出現が 1 回である項を線形という. 代入 σ は $\mathcal{V}$ から $T(\Sigma, \mathcal{V})$ への写像であり, 次の条件を満たす: $\text{dom}(\sigma) = \{x \in \mathcal{V} \mid \sigma(x) \neq x\}$ は有限である. 任意の代入 σ は写像 $\sigma: T(\Sigma, \mathcal{V}) \rightarrow T(\Sigma, \mathcal{V})$ へ拡張でき, 次の条件を満たす: $f(t_1, \dots, t_n) \in T(\Sigma, \mathcal{V})$ に対して, $\sigma(f(t_1, \dots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))$ が成り立つ. 以降では, $\sigma(t)$ を $t\sigma$ と表す. 書き換え規則 $l \rightarrow r$ は $T(\Sigma, \mathcal{V})$ 上の方向付けられた等式であり, 次の条件を満たす: $l \notin \mathcal{V}$ かつ $\mathcal{V}(r) \subseteq \mathcal{V}(l)$. 項書き換えシステム (TRS) は書き換え規則の集合である. 代入 σ , 文脈 $C[\]$, 書き換え規則 $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$ が存在し, $s = C[l\sigma]$ かつ $t = C[r\sigma]$ を満たすとき, s から t への TRS $\mathcal{R}$ による書き換えステップまたはリダクションステップが定義される. これを $s \rightarrow_{\mathcal{R}} t$ により表す. $s \rightarrow_{\mathcal{R}} t$ の逆書き換えて $t \leftarrow_{\mathcal{R}} s$ または $t \rightarrow_{\mathcal{R}}^{-1} s$ と表す. 項 $l\sigma$ をリデックスとよぶ. 書き換え規則 $l_1 \rightarrow r_1, l_2 \rightarrow r_2 \in \mathcal{R}$ に対して, 文脈 $C[\]$, 非変数項 t , 最汎単一化子 σ が存在して $l_2\sigma = C[t]\sigma$ かつ $l_1\sigma = t\sigma$ を満たす. このとき, $\langle C[r_1]\sigma, r_2\sigma \rangle$ を危険対とよぶ. $\mathcal{R}$ の書き換え規則との間に危険対が存在するとき, 重なりがあるとよぶ. 書き換え規則 $l \rightarrow r$ に対して, l が線形であるとき, これを左線形とよぶ. 任意の $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$ が左線形であるとき, TRS $\mathcal{R}$ を左線形とよぶ. また, $\mathcal{R}$ の書き換え規則との間に重なりがないとき, 左線形 TRS $\mathcal{R}$ を直交とよぶ. 任意の $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$ に対して $\mathcal{V}(l) = \mathcal{V}(r)$ のとき, $\mathcal{R}$ を非消去であるという. 任意の $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$ に対して $r \notin \mathcal{V}$ のとき, $\mathcal{R}$ を非縮退であるという. $\rightarrow$ を書き換えステップとする. $\rightarrow$ の反射推移的閉包を $\rightarrow^*$ と表し, 推移的閉包を $\rightarrow^+$ と表す. 無限書き換え列 $t_0 \rightarrow_{\mathcal{R}} t_1 \rightarrow_{\mathcal{R}} t_2 \rightarrow_{\mathcal{R}} \dots$ が存在しないとき, TRS $\mathcal{R}$ が停止性をもつという. 書き換え列 $t \rightarrow_{\mathcal{R}}^+ C[t]$ を基礎ループという. 項 $s \in T(\Sigma, \mathcal{V})$ に対して, $s \rightarrow_{\mathcal{R}} t$ を満たす $t \in T(\Sigma, \mathcal{V})$ が存在しないとき, s は $\mathcal{R}$ に関する正規形であるという. $\mathcal{R}$ に関する正規形全体の集合を $NF(\mathcal{R})$ と表す. 任意の $s, t, u \in T(\Sigma, \mathcal{V})$ に対して, $u \leftarrow_{\mathcal{R}}^* s \rightarrow_{\mathcal{R}}^* t$ のとき $v \in T(\Sigma, \mathcal{V})$ が存在して, $u \rightarrow_{\mathcal{R}}^* v \leftarrow_{\mathcal{R}}^* t$ を満たすとき, $\mathcal{R}$ は合流性をもつという.

3. 組合せ子に対する逆書き換えの停止性

本節では, 組合せ子論理の枠組みを用いて, 様々な組合せ子に対する逆書き換えが停止性をもつかどうかを明らかにする. 本節の結果は表 2 にまとめる. 最初に, 組合せ子 S に対する逆書き換えの例を与える.

例 1. 組合せ子 $Sxyz \rightarrow xz(yz)$ を考える. 書き換え $SSS(SSS)(SSS) \rightarrow_S S(SSS)(S(SSS))(SSS)$ の逆書き換えは, $SSS(SSS)(SSS) \leftarrow_S S(SSS)(S(SSS))(SSS)$. ここで, $SSS(SSS)(SSS)$ は組合せ子 S の停止性に対する反例である [6], [37]. すなわち, $SSS(SSS)(SSS)$ から始まる無限書き換え列が存在することが証明されている.

次に, 組合せ子 K, I の逆書き換えが停止性をもたないことを示す.

補題 2. 組合せ子 $Kxy \rightarrow x$ を考える. このとき, $CL(K)$ 上で逆書き換え $\leftarrow_K$ は停止性をもたない.

(証明) $C[\] = K\square K$ とする. 任意の $t \in CL(K)$ に対して, $KtK \leftarrow_K t$ より, $C[t] \leftarrow_K t$. $\square$

補題 3. 組合せ子 $Ix \rightarrow x$ を考える. このとき, $CL(I)$ 上で逆書き換え $\leftarrow_I$ は停止性をもたない.

(証明) $C[\] = I\square$ とする. 任意の $t \in CL(I)$ に対して, $It \leftarrow_I t$ より, $C[t] \leftarrow_I t$. $\square$

次に, 循環性をもつ組合せ子の逆書き換えは停止性をもたないことを示す.

補題 4. 組合せ子 $Z \in \{M, S', e_1, e_2, H, W, W^1, W^*, W^{**}\}$ とする. このとき, $CL(Z)$ 上で逆書き換え $\leftarrow_Z$ は停止性をもたない.

(証明) 組合せ子 $Mx \rightarrow xx$ に対して, $MM \leftarrow_M MM$ より, $CL(M)$ 上で逆書き換え $\leftarrow_M$ は停止性をもたない. 組合せ子 $S'xyzw \rightarrow xywzw$ に対して, $S'S'S'S' \leftarrow_{S'} S'S'S'S'$ より, $CL(S')$ 上で逆書き換え $\leftarrow_{S'}$ は停止性をもたない. 組合せ子 $e_1xy \rightarrow yxy$ に対して, $e_1e_1e_1 \leftarrow_{e_1} e_1e_1e_1$ より, $CL(e_1)$ 上で逆書き換え $\leftarrow_{e_1}$ は停止性をもたない. 組合せ子 $e_2xy \rightarrow yxy$ に対して, $e_2e_2e_2 \leftarrow_{e_2} e_2e_2e_2$ より, $CL(e_2)$ 上で逆書き換え $\leftarrow_{e_2}$ は停止性をもたない. 同様に, 循環性をもつ組合せ子 $Z \in \{H, W, W^1, W^*, W^{**}\}$ [15] は, 逆書き換え $\leftarrow_Z$ が停止性をもたない. $\square$

ここで, 組合せ子 Z が循環書き換えをもつことと, その逆書き換えが循環書き換えであることは同値であることに注意する. すなわち, $t \rightarrow_Z^+ t$ と $t \leftarrow_Z^+ t$ は同値である.

次に, 非循環性をもつ組合せ子 Z がある条件を満たすとき逆書き換え $\leftarrow_Z$ は停止性をもつことを示す.

定義 5. ([7], [15]) $s \in CL(Z)$ とする. (1) s の長さ $|s|$ を次の通り定義する: $|Z| = 1, |st| = |s| + |t|$. (2) s の重み $\|s\|$ を次の通り定義する: $\|Z\| = 1, \|st\| = 2 \cdot \|s\| + \|t\|$.

基礎 S -項に対する長さを用いて, 次の命題が示せる.

命題 6. ([7]) 組合せ子 S に対して, 任意の $s, t \in CL(S)$ に対して, $s \rightarrow_S t$ ならば $|s| \leq |t|$.

基礎 S -項に対する長さ, 重みと命題 6 を用いて, 次の命題が示せる. この命題の証明では重みが必要であることを注意する.

命題 7. ([7]) 組合せ子 S は非循環性をもつ.

次に, 命題 7 の証明手法を一般化して組合せ子が非循環性をもつための十分条件を与え, 組合せ子 L, O が非循環性をもつことを示す.

組合せ子 Z の条件を以下の通り与える [15].

(条件 1) $Zx_1 \dots x_n \rightarrow t$ を組合せ子 Z の書き換え規則とすると, 任意の $X_i \in CL(Z)$ ($1 \leq i \leq n$) に対して, $|ZX_1 \dots X_n| \leq |t\{x_1 := X_1, \dots, x_n := X_n\}|$.

(条件 2) 任意の $s, t \in CL(Z)$ と Z -リデックス Δ に対して, $s = C[\Delta] \rightarrow_Z C[\Delta'] = t$ かつ $|s| = |t|$ ならば $\|\Delta\| > \|\Delta'\|$.

命題 8. ([15]) (条件 1), (条件 2) を満たす組合せ子 Z は, $CL(Z)$ 上で非循環性をもつ.

組合せ子 L, O は (条件 1), (条件 2) を満たす [15]. よって, 次の命題が成り立つ.

命題 9. ([15]) $Z \in \{L, O\}$ とする. このとき, 組合せ子 Z は $CL(Z)$ 上で非循環性をもつ.

組合せ子 P_1 は停止性をもつから, 非循環性をもつ [16]. また, 組合せ子 $P, P_2, \Phi, S_1, S_3, L_1$ は (条件 1), (条件 2) を満たす [16]. よって, 次の命題が成り立つ.

命題 10. ([16]) $Z \in \{P, P_1, P_2, \Phi, S_1, S_3, L_1\}$ とする. このとき, 組合せ子 Z は $CL(Z)$ 上で非循環性をもつ.

次の命題は, 組合せ子 Z が非循環性をもつための十分条件を与える.

命題 11. ([16]) 組合せ子 Z の書き換え規則を $Zx_1 \dots x_n \rightarrow t$ とする. このとき, 任意の $X_i \in CL(Z)$ ($i = 1, \dots, n$) に対して $|ZX_1 \dots X_n| < |t\{x_1 := X_1, \dots, x_n := X_n\}|$ を満たすならば, 組合せ子 Z は $CL(Z)$ 上で非循環性をもつ.

組合せ子 $M_2, \Phi_2, S_2, \Gamma, S_4, C_1, C_2, D_1, D_2, \alpha_1, \alpha_2, N, s, M_3$ は命題 11 の条件を満たす [16]. よって, 次の命題が成り立つ.

命題 12. ([16]) $Z \in \{M_2, \Phi_2, S_2, \Gamma, S_4, C_1, C_2, D_1, D_2, \alpha_1, \alpha_2, N, s, M_3\}$ とする. このとき, 組合せ子 Z は $CL(Z)$ 上で非循環性をもつ.

次に, (条件 1) が $s \rightarrow_Z t$ ならば $|s| \leq |t|$ が成り立つための十分条件であることを示す.

補題 13. 組合せ子 $Zx_1 \dots x_n \rightarrow t$ は, (条件 1) を満たすとする. このとき, 任意の $s, t \in CL(Z)$ に対して, $s \rightarrow_Z t$ ならば $|s| \leq |t|$ が成り立つ.

(証明) 任意の $s, t \in CL(Z)$ に対して, ある $X_1, \dots, X_n \in CL(Z)$ について, $s = C[ZX_1 \dots X_n], t = C[t\{x_1 := X_1, \dots, x_n := X_n\}]$. このとき, $|s| \leq |t|$ が成立することを基礎 Z -文脈 $C[]$ の構造に関する帰納法により示せ

る. $C[] = \square$ のとき. 仮定より, $|ZX_1 \dots X_n| \leq |t\{x_1 := X_1, \dots, x_n := X_n\}|$. $C[] = YC'[]$ のとき. 帰納法の仮定より, $|C'[ZX_1 \dots X_n]| \leq |C'[t\{x_1 := X_1, \dots, x_n := X_n\}]|$. $|s| = |Y| + |C'[ZX_1 \dots X_n]| \leq |Y| + |C'[t\{x_1 := X_1, \dots, x_n := X_n\}]| = |t|$. $C[] = C'[Y]$ のとき. 前項と同様. $\square$

本節において, 非循環性をもつことを示した組合せ子 Z が, $s \rightarrow_Z t$ ならば $|s| \leq |t|$ を満たすことを示す.

補題 14. $Z \in \{L, O, P, P_1, P_2, \Phi, S_1, S_3, L_1\}$ とする. このとき, 任意の $s, t \in CL(Z)$ に対して, $s \rightarrow_Z t$ ならば $|s| \leq |t|$. $Z \in \{M_2, \Phi_2, S_2, \Gamma, S_4, C_1, C_2, D_1, D_2, \alpha_1, \alpha_2, N, s, M_3\}$ とすると, 任意の $s, t \in CL(Z)$ に対して, $s \rightarrow_Z t$ ならば $|s| \leq |t|$.

(証明) 1. 組合せ子 L, O は (条件 1) を満たす [15]. $Z \in \{L, O\}$ とすると, 補題 13 より, 任意の $s, t \in CL(Z)$ に対して $s \rightarrow_Z t$ ならば $|s| \leq |t|$.

2. 組合せ子 $M_2, \Phi_2, S_2, \Gamma, S_4, C_1, C_2, D_1, D_2, \alpha_1, \alpha_2, N, s, M_3$ は命題 11 の条件を満たす [16]. $Z \in \{M_2, \Phi_2, S_2, \Gamma, S_4, C_1, C_2, D_1, D_2, \alpha_1, \alpha_2, N, s, M_3\}$ とすると, 補題 13 より, 任意の $s, t \in CL(Z)$ に対して $s \rightarrow_Z t$ ならば $|s| \leq |t|$.

3. 組合せ子 $P, P_2, \Phi, S_1, S_3, L_1$ は (条件 1) を満たす [16]. $Z \in \{P, P_2, \Phi, S_1, S_3, L_1\}$ とすると, 補題 13 より, 任意の $s, t \in CL(Z)$ に対して $s \rightarrow_Z t$ ならば $|s| \leq |t|$.

4. 組合せ子 $P_1xyz \rightarrow y(xxz)$ のとき. 任意の $X_1, X_2, X_3 \in CL(P_1)$ に対して, $|P_1X_1X_2X_3| \leq |X_2(X_1X_1X_3)|$. 補題 13 より, 任意の $s, t \in CL(P_1)$ に対して $s \rightarrow_{P_1} t$ ならば $|s| \leq |t|$. $\square$

ここで, 命題 6 より, 次の命題が示せる.

命題 15. ([6]) 任意の $t \in CL(S)$ に対して, $s \rightarrow_S^* t$ を満たす有限個の基礎 S -項 s が存在する.

命題 7, 15 より, 次の命題が示せる. この命題は, 文献 [6], [7] における組合せ子 S の逆書き換えの停止性に関する定理である.

命題 16. ([6], [7]) 組合せ子 S に対して, $CL(S)$ 上の逆書き換え $\leftarrow_S$ は停止性をもつ.

ここで, 命題 6, 7 を一般化することにより, 次の条件を満たす組合せ子の逆書き換えは停止性をもつことを示す. すなわち, 命題 16 を一般化した定理を示す.

組合せ子 Z が次の条件を満たすとする.

(条件 3) 任意の $s, t \in CL(Z)$ に対して, $s \rightarrow_Z t$ ならば $|s| \leq |t|$.

(条件 4) $CL(Z)$ 上で非循環性をもつ.

次の補題は, 命題 15 を一般化したものである. 証明も命題 15 の証明に基づいている.

補題 17. 組合せ子 Z が (条件 3), (条件 4) を満たすとする. このとき, 任意の $t \in CL(Z)$ に対して, $s \rightarrow_Z^* t$ を満たす有限個の基礎 Z -項 s が存在する.

(証明) $t \in CL(Z)$ をとり, $k = |t| \in \mathbb{N}$ とする. (条件 3) $s \rightarrow_Z t$ ならば $|s| \leq |t|$ より, 次の包含関係が成り立つ: $\{s \in CL(Z) \mid s \rightarrow_Z^* t\} \subseteq \{s \in CL(Z) \mid |s| \leq k\}$. このとき, 後者の集合は有限より, 前者の集合も有限である. $\square$

次の定理は, 文献 [6], [7] による組合せ子 S の逆書き換えの停止性に関する定理, すなわち命題 16 を一般化したものである. 証明も命題 16 の証明に基づいている.

定理 18. (条件 3), (条件 4) を満たす組合せ子 Z に対して, $CL(Z)$ 上で逆書き換え $\leftarrow_Z$ は停止性をもつ.

(証明) 逆書き換え $\leftarrow_Z$ が停止性をもたないと仮定する. このとき, 無限逆書き換え列 $t_0 \leftarrow_Z t_1 \leftarrow_Z \cdots \leftarrow_Z t_n \leftarrow_Z \cdots$ が存在する. 補題 17 より, t_0 に対して $t_0 \leftarrow_Z^* s$ を満たす有限個の基礎 Z -項 s が存在する. よって, 上記の無限逆書き換え列は循環書き換えをもたなければならない. これは (条件 4) 組合せ子 Z が $CL(Z)$ 上で非循環性をもつことに矛盾する. $\square$

命題 9, 10, 12, 補題 14 と定理 18 より次の系が成り立つ.

系 19. $Z \in \{L, O, P, P_1, P_2, \Phi, S_1, S_3, L_1\}$ とする. このとき, $CL(Z)$ 上で逆書き換え $\leftarrow_Z$ は停止性をもつ. $Z \in \{M_2, \Phi_2, S_2, \Gamma, S_4, C_1, C_2, D_1, D_2, \alpha_1, \alpha_2, N, s, M_3\}$ とする. このとき, $CL(Z)$ 上で逆書き換え $\leftarrow_Z$ は停止性をもつ.

次に, 組合せ子 $Z \in \{J, B, B_2, B_3, D_1, D_2, D_3, \hat{E}, Q_0, Q_2, Q_4, Q_5, Q_6\}$ は停止性をもつ [16], [29] ので, $CL(Z)$ 上で非循環性をもつ. このとき, これらの組合せ子 Z に対して定理 18 が適用できるか確認する.

補題 20. 組合せ子 $Jxyzw \rightarrow xy(xwz)$ の逆書き換え $\leftarrow_J$ は $CL(J)$ 上で停止性をもつ.

(証明) 任意の $X_i \in CL(J)$ ($1 \leq i \leq 4$) に対して, $|JX_1X_2X_3X_4| \leq |X_1X_2(X_1X_4X_3)|$. 補題 13 と J の非循環性より, (条件 3), (条件 4) を満たす. 定理 18 より, $CL(J)$ で逆書き換え $\leftarrow_J$ は停止性をもつ. $\square$

一方, 組合せ子 $Z \in \{B, B_2, B_3, D_1, D_2, D_3, \hat{E}, Q_0, Q_2, Q_4, Q_5, Q_6\}$ に対して, 任意の $s, t \in CL(Z)$ について $s \rightarrow_Z t$ ならば $|s| > |t|$ より, $|s| \leq |t|$ は成立しない. また, 組合せ子 P_3 は非循環性をもつかどうか不明である [16]. よって, これらの組合せ子に対して定理 18 を適用することはできない.

以降では, これらの組合せ子 Z に対して, TRS の枠組みを用いて逆書き換えが停止性をもつかどうか明らかにする.

4. 非消去かつ非縮退な組合せ子 Z に対する逆 TRS $\mathcal{R}(Z)^{-1}$ の停止性

本節では, TRS の枠組みを用いて, 非消去かつ非縮退な組合せ子の逆書き換えの停止性について述べる. すなわち, $T(\Sigma_Z)$ 上の逆 TRS $\mathcal{R}(Z)^{-1}$ が停止性をもつかどうか明らかにする. 本節の結果は表 2 にまとめる.

組合せ子 Z に対して, 定数 Z と項数 2 の関数記号 $@$ からなる集合を $T(\Sigma_Z)$ により表す [17], [25]. $CL(Z)$ に属する基礎 Z -項は, $T(\Sigma_Z)$ に属する項として表す. $CL(Z)$ 上の書き換えシステムは, $T(\Sigma_Z)$ 上の TRS $\mathcal{R}(Z) = \{@(\dots @(@ (Z, x_1), x_2) \dots, x_{M_Z}) \rightarrow e\}$ とする. ここで, e は $@$ とある $M_Z \geq 1$ に対して変数 $x_1, \dots, x_{M_Z}$ のみから構成される項である^{*1}. $CL(Z)$ 上の書き換え $\rightarrow_Z$ と $T(\Sigma_Z)$ 上の TRS $\mathcal{R}(Z)$ による書き換え $\rightarrow_{\mathcal{R}(Z)}$ は互いに模倣する. よって, $\rightarrow_Z$ の停止性と合流性はそれぞれ $\rightarrow_{\mathcal{R}(Z)}$ の停止性と合流性と一致する. また, このことは逆書き換えについてもいえる.

TRS $\mathcal{R}(Z)$ の逆関係 $\mathcal{R}(Z)^{-1}$ を次の通り定義する: $\mathcal{R}(Z)^{-1} = \{r \rightarrow l \mid l \rightarrow r \in \mathcal{R}(Z)\}$. 組合せ子 Z が非消去かつ非縮退であれば, $\mathcal{R}(Z)^{-1}$ は TRS である. このとき, $\mathcal{R}(Z)^{-1}$ を $\mathcal{R}(Z)$ の逆 TRS という. $t \rightarrow_{\mathcal{R}(Z)} u$ ならば $u \leftarrow_{\mathcal{R}(Z)} t$. このとき, $\leftarrow_{\mathcal{R}(Z)}$ を $\rightarrow_{\mathcal{R}(Z)}^{-1}$ と表す. 逆 TRS $\mathcal{R}(Z)^{-1}$ の定義から, $\rightarrow_{\mathcal{R}(Z)}^{-1} = \rightarrow_{\mathcal{R}(Z)^{-1}}$.

例 21. TRS $\mathcal{R}(S) = \{@(@(@ (S, x), y), z) \rightarrow @(@ (x, z), @ (y, z))\}$ を考える. ここで, 逆 TRS は $\mathcal{R}(S)^{-1} = \{@(@ (x, z), @ (y, z)) \rightarrow @(@ (@ (S, x), y), z)\}$ である. このとき, $@(@ (S, @ (@ (S, S), S)), @ (S, @ (@ (S, S), S)))$
 $\rightarrow_{\mathcal{R}(S)^{-1}} @(@ (@ (S, S), S), @ (@ (S, S), S))$
 $\rightarrow_{\mathcal{R}(S)^{-1}} @(@ (@ (S, @ (S, S)), @ (S, S)), S)$

定理 22. (1) 組合せ子 $Z \in \{B, Q_2, Q_4, Q_5\}$ に対して, 逆 TRS $\mathcal{R}(Z)^{-1}$ は停止性をもたない.

(2) 組合せ子 $Z \in \{P_3\}$ に対して, 逆 TRS $\mathcal{R}(Z)^{-1}$ は停止性をもつ.

(証明) (1) 次の基礎ループが得られる.

1. $\mathcal{R}(B)^{-1} = \{@(x, @ (y, z)) \rightarrow @(@ (@ (B, x), y), z)\}$ を考える. $t = @(@ (@ (B, B), @ (B, B)), @ (B, B)), C[] = @(@ (@ (B, B), B))$ とする. このとき, $t \rightarrow_{\mathcal{R}(B)^{-1}}^+ C[t]$.

2. $\mathcal{R}(Q_2)^{-1} = \{@(y, @ (z, x)) \rightarrow @(@ (@ (Q_2, x), y), z)\}$ を考える. $t = @(@ (Q_2, Q_2), @ (Q_2, Q_2)), C[] = @(@ (Q_2, Q_2))$ とする. このとき, $t \rightarrow_{\mathcal{R}(Q_2)^{-1}}^+ C[t]$.

3. $\mathcal{R}(Q_4)^{-1} = \{@(z, @ (y, x)) \rightarrow @(@ (@ (Q_4, x), y), z)\}$ を考える. $t = @(@ (Q_4, Q_4), @ (Q_4, Q_4)), C[] = @(@ (Q_4, @ (@ (Q_4, Q_4), Q_4)))$ とする. このとき, $t \rightarrow_{\mathcal{R}(Q_4)^{-1}}^+ C[t]$.

4. $\mathcal{R}(Q_5)^{-1} = \{@(z, @ (@ (x, y), w)) \rightarrow @(@ (@ (@ (Q_5, x), y), z), w)\}$ を考える. $t = @(@ (@ (Q_5, Q_5), Q_5), @ (@ (Q_5, Q_5), Q_5)), C[] = @(@ (Q_5, Q_5))$ とする. このとき, $t \rightarrow_{\mathcal{R}(Q_5)^{-1}}^+ C[t]$.

(2) 次の多項式解釈 $POL(P_3) = 0, POL(@ (x_1, x_2)) = 1 + x_1 + 2x_2$ を考える. このとき, $POL(@ (y, @ (@ (x, z), y))) > POL(@ (@ (@ (P_3, x), y), z))$.

^{*1} 組合せ子 $Z \in \{\Gamma, N, s\}$ に対して, e は $Z, @$ と $x_1, \dots, x_{M_Z}$ から構成される項である.

よって, $\mathcal{R}(P_3)^{-1} = \{ @ (y, @ (@ (x, z), y)) \rightarrow @ (@ (@ (P_3, x), y), z) \}$ は停止性をもつ. このとき, $\mathcal{R}(P_3)^{-1}$ は非循環性をもつ. すなわち, $\mathcal{R}(P_3)$ は非循環性をもつ. $\square$

組合せ子の逆書き換えの停止性を調べるため, AProVE [11] を用いた実験を行い, 以下の結果を得た. 組合せ子 $Z \in \{B_2, D_1, Q_0, Q_6\}$ については, 逆 TRS $\mathcal{R}(Z)^{-1}$ は停止性をもたない. 停止性をもつ逆 TRS の和 $\mathcal{R}(M_2)^{-1} \cup \mathcal{R}(\Phi_2)^{-1} \cup \mathcal{R}(S_2)^{-1} \cup \mathcal{R}(\Gamma)^{-1} \cup \mathcal{R}(S_4)^{-1} \cup \mathcal{R}(C_1)^{-1} \cup \mathcal{R}(C_2)^{-1} \cup \mathcal{R}(D_1)^{-1} \cup \mathcal{R}(D_2)^{-1} \cup \mathcal{R}(\alpha_1)^{-1} \cup \mathcal{R}(\alpha_2)^{-1} \cup \mathcal{R}(N)^{-1} \cup \mathcal{R}(s)^{-1} \cup \mathcal{R}(M_3)^{-1} \cup \mathcal{R}(J)^{-1} \cup \mathcal{R}(P_3)^{-1}$ は停止性をもつ. なお, 定理 22 の証明中の, (1) での基礎ループ, および (2) の多項式解釈も, AProVE による実験結果の分析から得たものである.

しかしながら, 逆 TRS $\mathcal{R}(B_3)^{-1}, \mathcal{R}(D_2)^{-1}, \mathcal{R}(D_3)^{-1}, \mathcal{R}(\hat{E})^{-1}$ が停止性をもつかどうかは AProVE [11], TTT2 [21], Mu-term [24] では不明である. これらの逆 TRS は左線形であるが重なりをもつので, 直交ではない. よって, 中野と岩見のプログラム [25], [26] でも停止性の反証はできない.

5. 非消去かつ非縮退な組合せ子 Z に対する逆 TRS $\mathcal{R}(Z)^{-1}$ の合流性

本節では, TRS の枠組みを用いて, 非消去かつ非縮退な組合せ子 Z に対する逆 TRS $\mathcal{R}(Z)^{-1}$ が合流性をもつかどうか明らかにする. 本節の結果は表 2 にまとめる.

組合せ子 Z に対するほとんどの逆 TRS $\mathcal{R}(Z)^{-1}$ は合流性をもたないことを, 反例を与えることで示す. 次の定理を示すことができる.

定理 23. 組合せ子 $Z \in \{S, O, J, B, H, W, W^1, W^*, W^{**}, B_2, B_3, D_1, D_2, D_3, \hat{E}, Q_0, Q_5, Q_6, M_2, P, P_1, P_2, P_3, S_0, S', \Phi, S_1, S_2, S_3, L_1, \Gamma, e_1, e_2, S_4, C_1, C_2, D_1, D_2, \alpha_1, \alpha_2, N, M_3\}$ の逆 TRS $\mathcal{R}(Z)^{-1}$ は合流性をもたない.

(証明) 方針は次の通りである. ある項 $s, t, u \in T(\Sigma_Z)$ が存在し, $NF(\mathcal{R}(Z)^{-1}) \ni u \xleftarrow{\mathcal{R}(Z)^{-1}} s \xrightarrow{\mathcal{R}(Z)^{-1}} t \in NF(\mathcal{R}(Z)^{-1})$ を示せば, $\mathcal{R}(Z)^{-1}$ は合流性をもたない. ただし, $t \neq u$ とする. これらの証明を, 表 3, 4 にまとめる. $\square$

逆 TRS $\mathcal{R}(Q_4)^{-1}$ に対して, ACP+CeTA [2] *2, Hakusan [12], Hakusan+CeTA [13] *3 により, 合流性をもたないことを示すことができた. $\mathcal{R}(Q_2)^{-1}$ に対して, Hakusan [12], Hakusan+CeTA [13], Grackle CSI [38] により, 合流性をもたないことを示すことができた. また, $\mathcal{R}(\Phi_2)^{-1}, \mathcal{R}(s)^{-1}$

に対して, CONFident [23] により合流性をもたないことを示すことができた. $\mathcal{R}(M)^{-1}$ は CSI [20], Grackle CSI [38] により合流性をもつことを示すことができた. これは CSI, Grackle CSI において, 文献 [30] の結果が実装されているからである. 組合せ子 K, I は非消去かつ非縮退ではないが, 代表的な組合せ子であるので本節で扱う. 非消去かつ非縮退ではない組合せ子であっても, 組合せ子論理の枠組みにおいて逆書き換えは定義できる. しかしながら, 逆関係 $\mathcal{R}(K)^{-1}, \mathcal{R}(I)^{-1}$ は TRS ではない. 組合せ子 K, I に対する逆書き換えが合流性をもつかどうかは未解決である.

6. おわりに

本論文では, Bergstra と Klop の結果を, 様々な組合せ子に対し一般化した定理を与えた. 最初に, この定理を用いて 24 例の組合せ子に対する逆書き換えの停止性を示した. 次に, この定理が適用できない組合せ子 1 例に対し, 項書き換えシステムの枠組みを用いて, 逆書き換えの停止性を示した. さらに, 同様な組合せ子 8 例に対し, 逆書き換えの非停止性を示した. 最後に, 様々な組合せ子 49 例に対して, 同じ枠組みを用いて 46 例の逆書き換えの合流性を反証し, 1 例の逆書き換えの合流性を示した.

今後の課題は, 逆書き換えの停止性が未解決である 4 例の組合せ子の停止性を明らかにすることである. さらに, 逆書き換えの合流性が未解決である 2 例の組合せ子の合流性を明らかにすることである.

謝辞 ご議論いただいた中野圭介氏 (東北大学) と齊藤哲平氏 (JAIST) に感謝します. また, 貴重なコメントをいただいた査読者の方々に感謝します.

参考文献

- [1] Aoto, T. : ACP, ARIWEB, <https://ari-web.uibk.ac.at/>
- [2] Aoto, T. et al. : ACP+CeTA, ARIWEB, <https://ari-web.uibk.ac.at/>
- [3] Aoto, T. : Disproving confluence of term rewriting systems by interpretation and ordering, *Proc. of the 9th International Symposium on Frontiers of Combining Systems, FroCoS 2013, LNAI, 8152, Springer-Verlag*, pp.311–326 (2013).
- [4] Baader, F. and Nipkow, T., *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press (1998).
- [5] Barendregt, H. P. : *The Lambda Calculus, Its Syntax and Semantics*, Revised edition, North-Holland (1985).
- [6] Barendregt, H. P. and Manzonetto, G. : *A Lambda Calculus Satellite*, College Publications (2023).
- [7] Bergstra, J. A. and Klop, J. W. : Church-Rosser strategies in the lambda calculus, *Theoretical Computer Science*, Vol. 9, No. 1, pp. 27–38 (1979).
- [8] Curry, H. B., Hindley, J. R. and Seldin, J. P. : *Combinatory Logic*, Vol. 2, North-Holland (1972).
- [9] Dauchet, M. : Simulation of Turing machines by a regular rewrite rule, *Theoretical Computer Science*, Vol. 103, pp. 409–420 (1992).
- [10] Felgenhauer, B. and Thiemann, R. : Reachability, con-

*2 この結果は, ACP [1] において文献 [3] の結果が実装されていることから得られるはずであるが, 実は ACP だけでは示すことはできない. ACP と CeTA [35] を組み合わせることにより, 示すことができる. CeTA はあるツールにより与えられた停止性, 合流性, 計算量等の証明を保証するツールである.

*3 これらの結果は, Hakusan [12] において木オートマトンを用いた合流性の反証法 [10] が実装されているから得られる.

表 3 組合せ子に対する逆 TRS の合流性反証 (1)
Table 3 Disproving confluence of inverse TRSs for combinators (1).

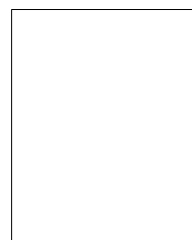
番号	組合せ子	u	s	t
1	S	$@(@@S, @S, S), @(@(@S, S), S), S)$	$@(@S, @S, @S, S), @(@S, S), @S, S)$	$@(@(@S, @(@S, S), S), S), S)$
2	O	$@(@O, O), @(@O, O), O)$	$@(@O, O), @O, @O, O)$	$@(@O, O), @O, O)$
3	J	$@(@(@J, J), J), @(@(@(@J, J), J), J), J)$	$@(@(@J, J), J), @(@(@J, J), J), J)$	$@(@(@(@J, @J, J), J), J), @(@J, J), J)$
4	B	$@(@(@(@(@(@(@(@(@B, B), B), B), B), B), B), B), B), B), B)$	$@B, @B, @B, B)$	$@(@(@(@(@(@(@B, B), B), B), B), B), B), B)$
5	H	$@(@(@(@H, @H, H), H), @H, H), @H, H)$	$@(@(@(@H, @H, H), H), @H, H), H), @H, H)$	$@(@(@H, @(@H, @H, H), H), @H, H), H)$
6	W	$@(@W, W), @W, W)$	$@(@(@W, @W, W), @W, W), @W, W)$	$@(@W, @W, @W, W), @W, W)$
7	W^1	$@(@(@W^1, @W^1, W^1), @W^1, W^1)$	$@(@(@W^1, @W^1, W^1), @W^1, W^1), @W^1, W^1)$	$@(@W^1, @W^1, W^1), @W^1, @W^1, W^1)$
8	W^*	$@(@(@W^*, @W^*, W^*), W^*, @W^*, W^*)$	$@(@(@W^*, W^*), @W^*, W^*), @W^*, W^*)$	$@(@(@W^*, W^*), W^*), @W^*, W^*)$
9	W^{**}	$@(@(@(@W^{**}, @W^{**}, W^{**}), W^{**}, W^{**}), @W^{**}, W^{**})$	$@(@(@(@W^{**}, W^{**}), W^{**}), @W^{**}, W^{**}), @W^{**}, W^{**})$	$@(@(@(@W^{**}, W^{**}), @W^{**}, W^{**}), W^{**}), @W^{**}, W^{**})$
10	B_2	$@(@(@(@(@B_2, @B_2, B_2), B_2), B_2), B_2), B_2)$	$@B_2, @(@B_2, B_2), @(@B_2, B_2), B_2)$	$@(@(@(@(@B_2, B_2), @B_2, B_2), B_2), B_2), B_2)$
11	B_3	$@(@(@(@(@(@(@(@B_3, @B_3, @B_3, B_3), B_3), B_3), B_3), B_3), B_3), B_3), B_3)$	$@B_3, @(@(@B_3, B_3), B_3), B_3), @(@(@B_3, B_3), B_3), B_3)$	$@(@(@(@(@(@B_3, B_3), @B_3, B_3), @B_3, B_3), B_3), B_3), B_3)$
12	D_1	$@(@(@(@(@(@(@(@D_1, @D_1, @D_1, @D_1, @D_1, @D_1), D_1), D_1), D_1), D_1), D_1), D_1)$	$@(@(@D_1, D_1), D_1), @(@(@D_1, D_1), D_1), @D_1, D_1)$	$@(@(@(@(@D_1, @(@(@D_1, @D_1, @D_1, @D_1, @D_1), D_1), D_1), D_1), D_1), D_1)$
13	D_2	$@(D_2, @(@(@D_2, D_2), D_2), D_2, D_2)$	$@(D_2, @D_2, @D_2, @D_2, D_2)$	$@(@(@(@D_2, D_2), D_2), D_2), @D_2, D_2)$
14	D_3	$@(@(@(@D_3, D_3), D_3), D_3), @(@(@D_3, D_3), D_3), D_3)$	$@(@D_3, @D_3, D_3), @(@D_3, @D_3, D_3), @D_3, D_3)$	$@(@(@(@D_3, @D_3, D_3), D_3), D_3), @D_3, D_3)$
15	$\hat{E}$	$@(@(@(@(@(@(@\hat{E}, \hat{E}), \hat{E}), \hat{E}), \hat{E}), \hat{E}), @(@\hat{E}, \hat{E}), \hat{E})$	$@(@(@\hat{E}, @(@\hat{E}, \hat{E}), \hat{E}), @(@\hat{E}, \hat{E}), \hat{E}), @(@\hat{E}, \hat{E}), \hat{E})$	$@(@(@(@(@(@\hat{E}, @\hat{E}, @\hat{E}, @\hat{E}, @\hat{E}), \hat{E}), \hat{E}), \hat{E}), \hat{E}), \hat{E})$
16	Q_0	$@(@(@(@Q_0, @(@Q_0, Q_0), Q_0), Q_0), Q_0), Q_0)$	$@(@(@Q_0, Q_0), @Q_0, Q_0), @Q_0, Q_0)$	$@(@(@(@Q_0, @Q_0, @Q_0, @Q_0), Q_0), Q_0), Q_0)$
17	Q_5	$@(@(@(@(@Q_5, @Q_5, Q_5), Q_5), Q_5), Q_5), Q_5)$	$@Q_5, @(@Q_5, @Q_5, Q_5), @Q_5, Q_5)$	$@(@(@(@Q_5, Q_5), @Q_5, Q_5), @Q_5, Q_5), Q_5)$
18	Q_6	$@(@(@(@(@Q_6, @Q_6, Q_6), Q_6), Q_6), Q_6), Q_6)$	$@Q_6, @(@Q_6, @Q_6, Q_6), @Q_6, Q_6)$	$@(@(@(@Q_6, @Q_6, Q_6), @Q_6, Q_6), @Q_6, Q_6), Q_6)$
19	M_2	$@(@M_2, @M_2, M_2)$	$@(@M_2, M_2), @M_2, M_2)$	$@(@M_2, @M_2, M_2)$
20	P	$@(@(@(@P, P), P), P), P)$	$@P, @(@P, @P, P), @P, P)$	$@(@(@P, P), @P, P), @P, P)$
21	P_1	$@(@(@P_1, @P_1, P_1), P_1, P_1)$	$@P_1, @(@P_1, P_1), @P_1, P_1)$	$@(@(@P_1, P_1), @P_1, P_1), P_1$
22	P_2	$@(P_2, @(@P_2, @P_2, P_2), P_2)$	$@P_2, @(@P_2, P_2), @P_2, P_2)$	$@(@(@P_2, P_2), P_2, P_2), P_2$
23	P_3	$@(@(@P_3, P_3), @P_3, P_3), @(@(@P_3, P_3), @P_3, P_3), P_3)$	$@(@(@P_3, P_3), @P_3, P_3), @P_3, P_3)$	$@(@(@P_3, P_3), @P_3, P_3), P_3$
24	S_0	$@(@(@S_0, @S_0, S_0), @S_0, S_0), S_0$	$@(@(@S_0, @S_0, S_0), S_0), @S_0, S_0)$	$@(@(@S_0, @S_0, @S_0, S_0), @S_0, S_0), S_0$
25	S'	$@(@(@S', @S', S'), @S', S'), @S', S')$	$@(@(@S', @S', S'), @S', S'), @S', S')$	$@(@(@S', @S', S'), @S', S'), @S', S')$

表 4 組合せ子に対する逆 TRS の合流性反証 (2)
Table 4 Disproving confluence of inverse TRSs for combinators (2).

番号	組合せ子	u	s	t
26	Φ	$@(@(@(@(@(\Phi, \Phi), \Phi), \Phi), \Phi), \Phi), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(\Phi, @(\Phi, \Phi)), @(\Phi, \Phi)), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(\Phi, @(\Phi, @(\Phi, \Phi))), \Phi), \Phi), \Phi), \Phi)$
27	S_1	$@(@(@(@(@(S_1, S_1), S_1), S_1), S_1), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(S_1, S_1), S_1), @(\Phi, \Phi)), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(S_1, @(\Phi, @(\Phi, \Phi))), S_1), S_1), S_1)$
28	S_2	$@(@(@(@(@(S_2, S_2), @(@(\Phi, \Phi), S_2)), @(@(@(@(\Phi, \Phi), S_2), S_2), S_2))$	$@(@(@(@(S_2, S_2), @(@(\Phi, \Phi), S_2)), @(@(@(@(\Phi, \Phi), S_2), S_2), S_2)))$	$@(@(@(@(S_2, S_2), @(\Phi, \Phi), S_2), @(\Phi, \Phi), S_2))$
29	S_3	$@(@(@(@(@(@(\Phi, \Phi), S_3), S_3), S_3), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(\Phi, \Phi), S_3), S_3), @(\Phi, \Phi)), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(\Phi, @(\Phi, @(\Phi, \Phi))), S_3), S_3), S_3)$
30	L_1	$@(L_1, @(@(@(L_1, @(\Phi, \Phi), L_1), L_1))$	$@(L_1, @(@(@(L_1, L_1), @(\Phi, \Phi), L_1))$	$@(@(@(@(@(L_1, L_1), L_1), L_1), L_1), L_1)$
31	Γ	$@(@(\Gamma, @(@(\Gamma, \Gamma), \Gamma)), @(@(\Gamma, \Gamma), \Gamma))$	$@(@(\Gamma, @(@(\Gamma, \Gamma), \Gamma)), @(@(\Gamma, \Gamma), @(@(\Gamma, \Gamma), \Gamma)))$	$@(@(\Gamma, \Gamma), \Gamma)$
32	e_1	$@(@(@(@(e_1, @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi)), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(e_1, @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi)), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(e_1, @(\Phi, @(\Phi, \Phi))), @(\Phi, \Phi))$
33	e_2	$@(@(@(@(e_2, @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi)), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(e_2, @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi)), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(e_2, @(\Phi, @(\Phi, \Phi))), @(\Phi, @(\Phi, \Phi)))$
34	S_4	$@(@(@(@(@(@(@(\Phi, @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi)), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(@(\Phi, @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi)), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(@(\Phi, @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi)), @(\Phi, @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$
35	C_1	$@(@(@(@(@(@(\Phi, @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi)), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(@(\Phi, @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi)), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(\Phi, @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$
36	C_2	$@(@(@(@(@(@(\Phi, @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi)), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(@(\Phi, @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi)), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(\Phi, @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$
37	$\mathcal{D}_1$	$@(@(@(@(@(@(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_1), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(@(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_1), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(\mathcal{D}_1, @(\Phi, @(\Phi, \Phi))), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$
38	$\mathcal{D}_2$	$@(@(@(@(@(@(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_2), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(@(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_2), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(\mathcal{D}_2, @(\Phi, @(\Phi, \Phi))), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$
39	α_1	$@(@(@(@(@(@(\alpha_1, \alpha_1), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(@(\alpha_1, \alpha_1), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(\alpha_1, @(\Phi, @(\Phi, \Phi))), @(\Phi, @(\Phi, @(\Phi, \Phi))$
40	α_2	$@(@(@(@(@(@(\alpha_2, @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(@(\alpha_2, @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(\alpha_2, @(\Phi, @(\Phi, \Phi))), @(\Phi, @(\Phi, @(\Phi, \Phi))$
41	N	$@(@(@(@(@(@(\Phi, @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(@(\Phi, @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(\Phi, @(\Phi, @(\Phi, \Phi))), @(\Phi, @(\Phi, @(\Phi, \Phi))$
42	M_3	$@(@(@(@(@(@(\Phi, @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(@(\Phi, @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi), @(\Phi, \Phi))$	$@(@(@(@(@(\Phi, @(\Phi, @(\Phi, \Phi))), @(\Phi, @(\Phi, @(\Phi, \Phi))$

- fluence, and termination analysis with state-compatible automata, *Information and Computation*, Vol. 253, pp.467-483 (2017).
- [11] Giesl, J. et al. : AProVE (AUTOMATED PROGRAM VERIFICATION ENVIRONMENT), Web Interface, <https://aprove.informatik.rwth-aachen.de/>
- [12] Hirokawa, N. et al. : Hakusan, ARIWEB, <https://ari-web.uibk.ac.at/>
- [13] Hirokawa, N. et al. : Hakusan+CeTA, ARIWEB, <https://ari-web.uibk.ac.at/>
- [14] Ikebuchi, M. and Nakano, K. : On properties of B -terms, *Logical Methods in Computer Science*, Vol. 16 (2), pp. 8:1-8:23 (2020).
- [15] 岩見宗弘 : 組合せ子の非循環性と関連する性質について, 情報処理学会論文誌プログラミング, Vol. 2, No.2, pp.97-104 (2009).
- [16] 岩見宗弘 : 様々な組合せ子の非 ω -強頭部正規化可能性・非基礎ループ性・非循環性, 情報処理学会論文誌プログラミング, Vol.16, No.3, pp.14-27 (2023).
- [17] Iwami, M. and Nakano, K. : Disproving termination of O -like combinators by tree automata, Non-SRC Poster, 22nd Asian Symposium on Programming Languages and Systems, APLAS 2024, extended abstract, 4 pages (2024).
- [18] Klop, J. W. : Term rewriting systems, *Handbook of Logic in Computer Science*, Vol. 2, Oxford University Press, pp.1-116 (1992).
- [19] Klop, J. W. : New fixed point combinators from old, *Reflections on Type Theory, Lambda Calculus, and the Mind*, Essays Dedicated to Henk Barendregt on the Occasion of his 60th Birthday, pp.197-210 (2007).
- [20] Middeldorp, A. et al. : CSI, Web Interface, <http://138.232.18.220/tool/csi>
- [21] Middeldorp, A. et al. : TTT2, Web Interface, <http://138.232.18.220/tool/ttt2>
- [22] Mitsuhashi, I., Oyamaguchi, M., and Jacquemard, F. : The confluence problem for flat TRSs, *Proc. of 8th International Conf. on Artificial Intelligence and Symbolic Computation*, AISC 2006, LNAI, 4120, Springer-Verlag, pp.68-81 (2006).
- [23] Lucas, S. et al. : CONFident (Confluence Checker for Conditional Rewrite Systems), Web Interface, <http://zenon.dsic.upv.es/confident/>
- [24] Lucas, S. et al. : Mu-term (Verify termination properties automatically), Web Interface, <http://zenon.dsic.upv.es/muterm/index.php/web-interface/>
- [25] Nakano, K. and Iwami, M. : Disproving termination of non-erasing sole combinatory calculus with tree automata, *Proc. of the 28th International Conf. on Implementation and Application of Automata*, CIAA 2024, LNCS, 15015, Springer-Verlag, pp.261-275 (2024).
- [26] Nakano, K. and Iwami, M. : Disproving termination of non-erasing sole combinatory calculus with tree automata (full version), arXiv:2406.14305v1, full version of [25], 20 pages (2024).
- [27] Ohlebusch, E. : *Advanced Topics in Term Rewriting*, Springer (2002).
- [28] Peyton Jones, S. L. : *The Implementation of Functional Programming Languages*, Prentice Hall (1987).
- [29] Probst, D. and Studer, T. : How to normalize the Jay, *Theoretical Computer Science*, Vol. 254(1-2), pp. 677-681 (2001).
- [30] Sakai, M., Oyamaguchi, M. and Ogawa, M. : Non- E -overlapping and weakly shallow TRSs are confluent, *Proc. of 3rd International Workshop on Confluence*, IWC 2014, pp. 34-38 (2014).
- [31] Smullyan, R. : *To Mock a Mockingbird*, Knopf, New York (1985).
- [32] Smullyan, R. : *Diagonalization and Self-Reference*, Oxford University Press (1994).
- [33] Sprenger, M. and Wymann-Böni, M. : How to decide the lark, *Theoretical Computer Science*, Vol. 110, pp. 419-432 (1993).
- [34] Terese, *Term Rewriting Systems*, Cambridge University Press (2003).
- [35] Thiemann, R. et al. : An Isabelle/HOL Formalization of Rewriting for Certified Tool Assertions, <http://138.232.18.220/tool/ceta>
- [36] Turner, D. A. : A new implementation technique for applicative languages, *Journal of Software: Practice and Experience*, Vol. 9, Issue 1, pp.31-49 (1979).
- [37] Waldmann, J. : The Combinator S , *Information and Computation*, Vol. 159(1-2), pp.2-21 (2000).
- [38] Zhang, L. and Cao, Q. : Grackle CSI, ARIWEB, <https://ari-web.uibk.ac.at/>

岩見 宗弘 (正会員)



1999 年北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科博士後期課程修了。博
士 (情報科学)。2024 年岩手県立大学
ソフトウェア情報学部准教授。項書き
換えシステム, 定理自動証明, プログ
ラミング教育の研究に従事。電子情報
通信学会, 日本ソフトウェア科学会, ACM 各会員。