研究速報

左線形かつ K-開発閉包な項書換えシステムの合流性

岩見　宗弘[†](正員)

Confluence of Left-Linear and K-Development Closed Term Rewriting Systems

Munehiro IWAMI[†], *Member*

[†] 島根大学 総合理工学部, 松江市
Shimane University, Nishikawatsu 1060, Matsue-shi, 690–8504, Japan

あらまし　Huet は, 左線形かつ並行閉包な項書換えシステム (TRS) は合流性を持つことを示した. Toyama は, 並行閉包の条件を拡張し, 左線形かつ緩和並行閉包な TRS は合流性を持つことを示した. Oostrom は, Huet と Toyama の条件を拡張し, 左線形かつ開発閉包な TRS は合流性を持つことを示した. さらに, Oyamaguchi らは, Toyama の結果を一般化した K-閉包の概念を導入し, 左線形かつ K-閉包な TRS は, 合流性を持つことを示している. 本稿では, Oyamaguchi らと同様の手法により, 開発閉包を一般化した K-開発閉包の条件を与え, 左線形かつ K-開発閉包な TRS は合流性を持つことを示す.

キーワード　項書換えシステム , 合流性, 左線形

1. ま え が き

項書換えシステム (TRS) は, 等式による柔軟な計算と効率的な推論を与えることができる [9]. TRS は, 関数・論理型言語の計算モデルや定理自動証明, 記号処理, 代数的仕様記述, 検証等に広く応用されている. TRS の合流性は, 与えられた項の最も単純な形 (正規形) が一意であることを保証する. しかしながら, 合流性は一般に決定不能であることが知られており, 合流性を示すために多くの十分条件が与えられている.

Rosen は, 左線形かつ重なりがない TRS は合流性を持つことを示した [8]. Huet は, 左線形かつ並行閉包な TRS は合流性を持つことを示した [2]. Toyama は, 並行閉包の条件を拡張し, 左線形かつ緩和並行閉包な TRS は合流性を持つことを示した [10]. Oostrom は, Huet と Toyama の結果を, 開発閉包の概念を導入し, 高階項書換えシステム (HRS) へ拡張した [4], すなわち, 左線形かつ開発閉包な HRS は, 合流性を持つことを示した. Oyamaguchi らは, 上側並行閉包の概念を与え, 左線形かつ上側並行閉包な TRS は合流性を持つことを示した [6]. Gramlich は, 並行危険対の概念を与え, 左線形かつ並行危険対条件を満たす TRS は, 合流性を持つことを示した [1]. Okui は, 同時危険対の概念を与え, 左線形かつ強閉包な TRS は, 合流性を持つことを示した [3]. Oyamaguchi らは, Toyama の結果を一般化した K-閉包の概念を導入し, 左線形かつ K-閉包な TRS は, 合流性を持つことを示した [7].

本稿では, Oyamaguchi ら [7] と同様の手法により, 開発閉包を一般化した K-開発閉包の条件を与える. 次に, 左線形かつ K-開発閉包な TRS は合流性を持つことを示す. さらに, 本結果の有用性を示すために, 例を与える.

2. 準　　備

本節では , 本稿で使用する定義と概念を述べる . 定義と概念は文献 [7], [9] に準ずる .

記号 ϵ は空列を表し , $\emptyset$ は空集合を表す . V は変数の集合 , F は関数記号の集合とする . T は V と F から生成される項の集合とする . 項 M に対して , $P(M)$ は M の出現の集合を表す . $P_F(M)$ は項 M における関数記号の出現の集合を表し , M/u は出現 u の M の部分項を表し , $M[u \leftarrow N]$ は部分項 M/u を項 N により置き換えることにより得られる項を表す . 項 M における任意の変数の出現が 1 より大きくないとき線形であるという . 書換え規則 $l \to r$ は , 項上の方向付けられた等式であり , 次の条件を満たす : $l \notin V$ かつ $V(r) \subseteqq V(l)$. 書換え規則 $l \to r$ に対して , l が線形であるとき , 左線形であるという. 項書換えシステム **(TRS)** は , 書換え規則の有限集合である . 任意の書換え規則が左線形であるとき , TRS R が左線形であるという . TRS R により, 項 M が出現 u において N に書換えられるとは, ある代入 σ と書換え規則 $l \to r \in R$ が存在し, $M = M[u \leftarrow \sigma(l)]$ かつ $N = M[u \leftarrow \sigma(r)]$ を満たすときをいい, $M \to^u_R N$ により表す. TRS R が合流性を持つとは, $\leftarrow^*_R \cdot \to^*_R \subseteqq \to^*_R \cdot \leftarrow^*_R$ が成り立つときをいう. TRS R により, それ以上書換えることができない項を R の正規形と呼び, R のすべての正規形の集合を $NF(R)$ により表す. $\gamma : M_0 \to^{u_0}_R M_1 \to^{u_1}_R \ldots \to^{u_{n-1}}_R M_n$ を書換え列とする. このとき, $\mathcal{R}(\gamma) = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\}$, すなわち, γ のリデックス出現の集合とする. $\mathcal{R}(\gamma)$ が互いに素ならば, γ は並行書換えであるといい, $M \twoheadrightarrow^{\mathcal{R}(\gamma)}_R M_n$ により表す. TRS R_1 と R_2 の書換え規則から得られる危険対の集合 $CP(R_1, R_2)$ を次のように定義する : $CP(R_1, R_2) = \{\langle\, \theta(l_1)[u \leftarrow \theta\,(r_2)], \theta\,(r_1)\,\rangle_u \mid l_1 \to r_1 \in R_1, l_2 \to r_2 \in R_2, u \in P_F(l_1), l_1 \to r_1 \neq l_2 \to r_2, \theta(l_1/u) = \theta(l_2)\}$. ここで, $V(l_1) \cap V(l_2) = \emptyset$ かつ θ は l_1/u と l_2 の最汎単一子である. $CP(R)$ は $CP(R, R)$ で定

義される TRS R の危険対の集合である．$CP(R) = \emptyset$ のとき，TRS R は重なりがないという．TRS R に対して，同時書換え $\multimap_R$ を次のように帰納的に定義する．1. x を変数とする．$x \multimap_R x$．2. f を項数 n の関数記号とする．$s_i \multimap_R t_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ ならば，$f(s_1, \ldots, s_n) \multimap_R f(t_1, \ldots, t_n)$．3. $l \to r \in R$ とする．$\sigma \multimap_R \tau$ を満たす代入 σ, τ，すなわち，任意の変数 x に対して $\sigma(x) \multimap_R \tau(x)$ に対して，$\sigma(l) \multimap_R \tau(r)$．

3. K-開発閉包な左線形項書換えシステムの合流性

本節では，K-開発閉包の定義を与える．次に，左線形かつ K-開発閉包な TRS は合流性を持つことを示す．

K-開発閉包は，Oostrom による大方開発閉包 **(almost development closed)** ([4], pp.196) を一般化した条件であり，$\emptyset$-開発閉包 $(K = \emptyset)$ は，大方開発閉包と一致する．

[定義 3.1] 次の条件を満たすとき，左線形 TRS R は K-開発閉包 **(K-development closed)** であるという．

(1) $K \subseteqq R$ かつ K は合流性を持つ．

(2) $\forall \langle P, Q \rangle_u \in CP(K, R-K)$ $(u \neq \epsilon)$ に対して，$P \multimap_K Q$．

(3) $\forall \langle P, Q \rangle_u \in CP(R-K, R)$ $(u \neq \epsilon)$ に対して，$P \multimap_{R-K} \cdot \to_K^* \cdot \leftarrow_K^* Q$．

(4) $\forall \langle P, Q \rangle_\epsilon \in CP(K, R-K)$ に対して，$P \to_K^* \cdot \leftarrow_K^* \cdot \leftarrow\!\multimap_{R-K} Q$．

(5) $\forall \langle P, Q \rangle_\epsilon \in CP(R-K, R-K)$ に対して，$P \to_K^* \cdot \multimap_{R-K} \cdot \to_K^* \cdot \leftarrow_R^* Q$．

[定理 3.2] 任意の左線形かつ K-開発閉包な TRS R は，合流性を持つ．

(証明) K-開発閉包は，K-閉包 **(K-closed)** ([7], pp.132) の定義中の並行書換え $\Vdash\!\to$ をすべて同時書換え $\multimap$ で置き換えたものである．$\to \subseteqq \Vdash\!\to \subseteqq \multimap \subseteqq \to^*$ から，文献 [7] と同様の手法により証明できる． □

[定理 3.3] TRS R が，K-閉包ならば，K-開発閉包である．

(証明) $\Vdash\!\to \subseteqq \multimap$ より，自明． □

4. 例

本節では，定理 3.2 の有用性を示すために，例を与える．

[例 4.1] 次の 3 つの左線形 TRS R_1, R_2, R_3 を考える．R_1, R_2, R_3 は，文献 [3] で与えられている．

$R_1 = \{f(g(g(x))) \to a,\ f(g(h(x))) \to b,$
$f(h(g(x))) \to b,\ f(h(h(x))) \to c,$
$g(x) \to h(x),\ a \to b,\ b \to c\}$.

$R_2 = \{a \to c,\ b \to c,\ f(a,b) \to d, f(x,c) \to f(c,c),$
$f(c,x) \to f(c,c), d \to f(a,c), d \to f(c,b)\}$.

$R_3 = \{f(x) \to x, f(x) \to f(f(x))\}$.

Okui により，次のような表が与えられている [3].

	R_1	R_2	R_3
Toyama-Gramlich [11], [1]	○	×	×
Oyamaguchi-Ohta [6]	×	○	×
Okui [3]	×	×	○

(○ ... 満たす, × ... 満たさない)

本稿では，新たに次のような左線形 TRS R_4 を与える．

$$R_4 = \left\{ \begin{array}{l} g(x) \to x \\ f(f(x)) \to g(x) \\ f(x) \to f(f(f(x))) \end{array} \right\}$$

TRS R_4 は，従来までに提案されている合流条件を満たさないので，TRS R_1, R_2, R_3, R_4 に対して，次のような表が得られる．

	R_1	R_2	R_3	R_4
Toyama-Gramlich	○	×	×	×
Oyamaguchi-Ohta [6]	×	○	×	×
Huet-Toyama-Oostrom [4], [5]	×	×	○	×
Okui	×	×	○	×
Oyamaguchi-Ohta [7]	○	○	○	×
本研究	○	○	○	○

$CP(R_4) = \{\langle g(x), f(f(f(f(x))))\rangle_\epsilon, \langle f(f(f(f(x)))), g(x)\rangle_\epsilon, \langle f(f(f(f(x)))), g(x)\rangle_1, \langle f(g(x)), g(f(x))\rangle_1\}$ である．

- TRS R_4 は，Toyama-Gramlich の条件 [11], [1] を満たさない，すなわち，並行危険対条件 **(parallel critical pair condition)**([1], pp.219) を満たさない．

$\langle f(f(f(f(x)))),\ g(x)\rangle_\epsilon \in CP\ (R_4)$ に対して，$f(f(f(f(x)))) \ (= P)\ \Vdash\!\to_{R_4} \cdot \leftarrow_{R_4}^* g(x)\ (= Q)$ が成立しない．

- TRS R_4 は，Oyamaguchi-Ohta の条件 [6] を満さない，すなわち，上側並行閉包 **(upside parallel closed)** ([6], pp.190) ではない．

$\langle f(f(f(f(x)))),\ g(x)\rangle_\epsilon \in CP\ (R_4)$ に対して，$f(f(f(f(x)))) \ (= P)\ (\Vdash\!\to_{R_4} \cup \leftarrow_{R_4 =}^{\epsilon}) \cdot (\Vdash\!\to_{R_4}^{W} \cup \leftarrow_{R_4 =}^{\epsilon})\ g(x)\ (= Q)$ $(W \neq \{\epsilon\})$ が成立しない．

- TRS R_4 は，Huet-Toyama-Oostrom の条件

[4], [5] を満たさない, すなわち, 大方開発閉包 ([4], pp.196) ではない.

$\langle f(f(f(f(x)))),\ g(x)\rangle_\epsilon \in CP\ (R_4)$ に対して, $f(f(f(f(x))))\ (=P) \multimap_{R_4} \cdot \leftarrow^*_{R_4} g(x)\ (=Q)$ が成立しない.

- TRS R_4 は, Okui の条件 [3] を満たさない, すなわち, 強閉包 **(strongly closed)**([3], pp.10) ではない.

$\langle g(x),\ f(f(f(f(x))))\rangle_\epsilon \in CP\ (R_4)$ に対して, $g(x)\ (=P) \rightarrow^*_{R_4} \cdot \multimap_{R_4} f(f(f(f(x))))\ (=Q)$ が成立しない.

- TRS R_4 は, Oyamaguchi-Ohta の条件 [7] を満たさない, すなわち, すべての $K \subseteq\!\!\!=\ R_4$ ($K \neq \emptyset$ かつ $K \neq R_4$)(注1) に対して, K-閉包 ([7], pp.132) ではない.

1. $K = \{g(x)\rightarrow x\}$, $R_4 - K = \{f(f(x)) \rightarrow g(x),\ f(x) \rightarrow f(f(f(x)))\}$ のとき；

K は左線形かつ重なりがない TRS より, 合流性を持つ [8].

しかしながら, $\langle f(f(f(f(x)))), g(x)\rangle_1 \in CP(R_4 - K,\ R_4)$ に対して, $f(f(f(f(x))))\ (=P) \not\Rightarrow_{R_4-K} \cdot \rightarrow^*_K \cdot \leftarrow^*_K g(x)\ (=Q)$ は成立しない.

2. $K = \{g(x)\rightarrow x, f(f(x)) \rightarrow g(x)\}$, $R_4 - K = \{f(x) \rightarrow f(f(f(x)))\}$ のとき；

$CP(K) = \{\langle f(g(x)), g(f(x))\rangle_1\}$ に対して, $f(g(x)) \rightarrow_K f(x) \leftarrow_K g(f(x))$ が成り立つ. K は左線形かつ並行危険対条件を満たす TRS より, 合流性を持つ [1].

しかしながら, $\langle f(f(f(f(x)))),\ g(x)\rangle_1 \in CP(K,\ R_4 - K)$ に対して, $f(f(f(f(x))))\ (=P) \not\Rightarrow_K g(x)\ (=Q)$ は成立しない.

3. $K = \{g(x)\rightarrow x, f(x) \rightarrow f(f(f(x)))\}$, $R_4 - K = \{f(f(x)) \rightarrow g(x)\}$ のとき；

K は左線形かつ重なりがない TRS より, 合流性を持つ [8].

しかしながら, $\langle f(f(f(f(x)))), g(x)\rangle_1 \in CP(R_4 - K, R_4)$ に対して, $f(f(f(f(x))))\ (=P) \not\Rightarrow_{R_4-K} \cdot \rightarrow^*_K \cdot \leftarrow^*_K g(x)\ (=Q)$ は成立しない.

4. $K = \{f(f(x)) \rightarrow g(x),\ f(x) \rightarrow f(f(f(x)))\}$, $R_4 - K = \{g(x)\rightarrow x\}$ のとき；

TRS K は合流性を持たない.

$NF(K) \ni g(g(x)) \leftarrow^*_K f(f(f(f(x)))) \leftarrow^1_K f(f(x)) \rightarrow^\epsilon_K g(x) \in NF(K)$.

5. $K = \{f(x) \rightarrow f(f(f(x)))\}$, $R_4 - K = \{g(x)\rightarrow x,\ f(f(x)) \rightarrow g(x)\}$ のとき；

K は左線形かつ重なりがない TRS より, 合流性を持つ [8].

しかしながら, $\langle f(f(f(f(x)))), g(x)\rangle_1 \in CP(R_4 - K,\ R_4)$ に対して, $f(f(f(f(x))))\ (=P) \not\Rightarrow_{R_4-K} \cdot \rightarrow^*_K \cdot \leftarrow^*_K g(x)\ (=Q)$ は成立しない.

6. $K = \{f(f(x)) \rightarrow g(x)\}$, $R_4 - K = \{g(x)\rightarrow x,\ f(x) \rightarrow f(f(f(x)))\}$ のとき；

TRS K は合流性を持たない.

$NF(K) \ni f(g(x)) \leftarrow^1_K f(f(f(x))) \rightarrow^\epsilon_K g(f(x)) \in NF(K)$.

1 から 6 より, すべての $K \subseteq\!\!\!=\ R_4$ ($K \neq \emptyset$ かつ $K \neq R_4$) に対して, K-閉包ではない.

- TRS R_4 の合流性を定理 3.2 を適用し示す.

$$K = \left\{ \begin{array}{l} g(x)\rightarrow x \end{array} \right\}$$

$$R_4 - K = \left\{ \begin{array}{l} f(f(x))\rightarrow g(x) \\ f(x)\rightarrow f(f(f(x))) \end{array} \right\}$$

(1) TRS K は左線形かつ重なりがないから, 合流性を持つ [8].

(2) $CP(K, R_4 - K) = \emptyset$.

(3) $CP(R_4 - K, R_4) = \{\langle g(x), f(f(f(f(x))))\rangle_\epsilon, \langle f(f(f(f(x)))),\ g(x)\rangle_\epsilon,\ \langle f(f(f(f(x)))),\ g(x)\rangle_1, \langle f(g(x)), g(f(x))\rangle_1\}$.

$\forall\ \langle P, Q\rangle_u \in CP(R_4 - K,\ R_4)\ (u \neq \epsilon)$ に対して , $P \multimap_{R_4-K} \cdot \rightarrow^*_K \cdot \leftarrow^*_K Q$ が成り立つ.

$f(f(f(f(x))))\ (=P) \multimap_{R_4-K} g(g(x)) \rightarrow_K g(x)\ (=Q)$ かつ $f(g(x))\ (=P) \rightarrow_K f(x) \leftarrow_K g(f(x))\ (=Q)$ が成り立つ.

(4) $CP(K, R_4 - K) = \emptyset$.

(5) $CP\ (R_4 - K,\ R_4 - K) = \{\langle\ g(x), f(f(f(f(x))))\ \rangle_\epsilon, \langle\ f(f(f(f(x)))), g(x)\ \rangle_\epsilon, \langle\ f(f(f(f(x)))), g(x)\ \rangle_1, \langle\ f(g(x)), g(f(x))\ \rangle_1\}$.

$\forall \langle P, Q\rangle_\epsilon \in CP(R_4 - K, R_4 - K)$ に対して , $P \rightarrow^*_K \cdot \multimap_{R_4-K} \cdot \rightarrow^*_K \cdot \leftarrow^*_{R_4} Q$ が成り立つ .

$g(x)\ (=P) \leftarrow_{R_4} g(g(x)) \leftarrow^*_{R_4} f(f(f(f(x))))\ (=Q)$ かつ $f(f(f(f(x))))\ (=P) \multimap_{R_4-K} g(g(x)) \rightarrow_K g(x)\ (=Q)$ が成り立つ .

よって , R_4 は左線形かつ K-開発閉包である . 定理 3.2 から , TRS R_4 は合流性を持つ.

したがって, 従来までの合流条件が適用できない

(注1): 左線形 TRS R の合流性を示す場合, $\emptyset$-開発閉包 ($K = \emptyset$) は大方開発閉包と一致し, R-開発閉包 ($K = R$) は合流性の判定条件として意味を持たない. また, TRS R の合流性がどんな方法であれ判定できれば, R-閉包であり, かつ, R-開発閉包である.

TRS R_4 の合流性を, 本結果を用いて示すことができる. さらに, TRS R_1, R_2, R_3 の全ての合流性を本結果を用いて示すことができる. 従来の合流条件は, TRS R_1, R_2, R_3, R_4 の全てには適用できない. しかしながら, 本研究の合流条件は, TRS R_1, R_2, R_3, R_4 の全てに適用可能であり, 合流性を示すことができる.

5. む す び

本稿では, Oyamaguchi らと同様の手法により, 開発閉包を一般化した K-開発閉包の条件を与えた. 次に, 左線形かつ K-開発閉包な項書換えシステムは合流性を持つことを示した. さらに, 本結果の有用性を示すために, 例を与えた. 今後の課題は, 本結果と Okui の条件を理論的に比較・検討することである.

謝辞　本研究に対して有益な助言を頂いた外山 芳人先生, 酒井 正彦先生及び御指摘を頂いた査読者の方々に感謝致します.

文　　献

[1] B. Gramlich, “Confluence without termination via parallel critical pairs,” Proc. on 21st International Colloquium on Trees in Algebra and Programming, LNCS, 1059, pp.211–225, 1996.

[2] G. Huet, “Confluence reductions: abstract properties and applications to term rewriting systems,” J. ACM, 27, 4, pp.797–821, 1980.

[3] S. Okui, “Simultaneous critical pairs and Church-Rosser property,” Proc. on 9th International Conf. on Rewriting Techniques and Applications, LNCS, 1379, pp.2-16, 1998.

[4] V. van Oostrom, “Development closed critical pairs,” Proc. 2nd International Workshop on Higher-Order Algebra, Logic and Term Rewriting, LNCS, 1024, pp.185-200, 1995.

[5] V. van Oostrom, “Developing developments,” Theoretical Computer Science, 175, 1, pp.185–200, 1997.

[6] M. Oyamaguchi and Y. Ohta, “A new parallel closed condition for Church-Rosser of left-linear term rewriting systems,” Proc. on 8th International Conf. on Rewriting Techniques and Applications, LNCS, 1232, pp.187–201, 1997.

[7] M. Oyamaguchi and Y. Ohta, “On the Church-Rosser property of left-linear term rewriting systems,” IEICE Transactions of Information and Systems, E86-D, 1, pp.131–135, 2003.

[8] B. K. Rosen, “Tree-manipulating systems and Church-Rosser theorems,” J. ACM, 20, 1, pp.160–187, 1973.

[9] Terese, “Term rewriting systems,” Cambridge University Press, 2003.

[10] Y. Toyama, “On commutativity of term rewriting systems,” IEICE Transactions of Information and Systems, J66-D, 12, pp.1370–1375, 1983 (in Japanese).

[11] Y. Toyama, “On the Church-Rosser property of term rewriting systems,” Technical Report, 17672, NTT ECL , 1981 (in Japanese).

(平成 xx 年 xx 月 xx 日受付)

Abstract Huet showed that any left-linear and parallel closed term rewriting system (TRS) is confluent. Toyama showed that any left-linear and relaxed parallel closed TRS is confluent. Oostrom introduced the notion of development closed generalized Huet and Toyama's results and showed that any left-linear and development closed TRS is confluent. Furthermore, Oyamaguchi and Ohta introduced the notion of K-closed generalized Toyama's result and showed that any left-linear and K-closed TRS is confluent. In this paper, we propose the notion of K-development closed generalized Oostrom's result using the similar method of Oyamaguchi and Ohta, and show that any left-linear and K-development closed TRS is confluent.

Key words Term rewriting system, Confluence, Left-linear