関数の極値

1. 絶対極値(Absolute Extreme Values)

定義:絶対極値

定義域Dを伴った関数fがあるとする。その時、$f(c)$ は

(a) D の全てのx に対して $f(x) \le f(c)$ が成り立つ場合、**D の絶対最大値**、

(b) D の全てのx に対して $f(x) \ge f(c)$ が成り立つ場合、**D の絶対最小値**。

関数	定義域D	D の絶対極値
$f(x) = x^2$	$(-\infty, +\infty)$	絶対最大値なし
$f(x) = x^2$	$[0, 2]$	$x = 2$ の時、絶対最大値 4 $x = 0$ の時、絶対最小値 0
$f(x) = x^2$	$(0, 2]$	$x = 2$ の時、絶対最大値 4 絶対最小値なし
$f(x) = x^2$	$(0,2)$	絶対最大値なし、 絶対最小値なし
$f(x) = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$x = \frac{\pi}{2}$ の時、絶対最大値 1 $x = \frac{3\pi}{2}$ の時、絶対最小値 -1

2. 小域的極値 (Local Extreme Values)

定義:小域的極値

関数 $f(x)$ の定義域の中の点をc とする。その時、$f(c)$ は、

(a) c を含んだ開区間で全ての x に対して $f(x) \le f(c)$ が成り立つ場合、c においての**極大値**、

(b) c を含んだ開区間で全ての x に対して $f(x) \ge f(c)$ が成り立つ場合、c においての**極小値**

3. 極値の決定(Finding Extreme Values)

定理:小域的極値

もし関数 $f(x)$ が定義域の内点c で極大値または極小値を持ち、$f'(x)$ がc にある場合、

$$f'(c) = 0$$

定義:臨界点(Critical Point)

$f'(x) = 0$ または $f'(x)$ が存在しない関数 $f(x)$ の定義域内の点は $f(x)$ の臨界点である。

問題例１：

$f(x)=7x^2-3x+5$ の臨界点を求めなさい。

一次導関数

$$f'(x)=14x-3$$

この関数 $f(x)$ の臨界点は $f'(x)=0$ を求める。

$$\text{臨界点:}\quad f'(x)=14x-3=0\to x=\frac{3}{14}$$

となる。

問題例２：

$f(x)=x^3-2x^2+x+1$ の臨界点を求めなさい。

一次導関数

$$f'(x)=3x^2-4x+1$$

この関数 $f(x)$ の臨界点は $f'(x)=0$ を求める。

$$\text{臨界点:}\quad f'(x)=3x^2-4x+1=0\to\ x=1,\ x=\frac{1}{3}$$

となる。

問題例3:

関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ の極値を求めなさい。

$f(x)$ は $4-x^2>0$ の間のみ定義できる関数であり、そのことから定義域は開区間 $-2<x<2$ となる。また、その定義域は端点を持たず、全ての極値は臨界点で起こるものとされる。$f'(x)$ を求めるための $f(x)$ の公式は以下のように書き換えられる。

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}=(\sqrt{4-x^2})^{-1}=(4-x^2)^{-1/2}$$

よって、

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(4-x^2)^{-3/2}(-2x)=\frac{x}{(4-x^2)^{3/2}}$$

$-2<x<2$ の定義域での臨界点は $x=0$ である。その値

$$f(0)=\frac{1}{\sqrt{4-0^2}}=\frac{1}{2}$$

は、結果より極値となる唯一の候補となる。

その $1/2$ が $f(x)$ の極値であることを裏付けるために、

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

を改めて考えてみる。これはx が0 から左右どちらかへ離れていくにつれて、その分母は小さくなり、関数 $f(x)$ の値は増加し、グラフは上昇する。よって、$x=0$ の時に最小値となり、それが絶対最小値となる。

3. 小域的極値の決定　(Finding Local Extreme Values)

定義：小域的極値

関数 $f'(c)=0$ と $f''(c)$ が存在とする。その時、$f(c)$ は、

(a) $f''(c)<0$ が成り立つ場合、c においての**極大値**、

(b) $f''(c)>0$ が成り立つ場合、c においての**極小値**

(c) $f''(c)=0$ が成り立つ場合、c において何も分かりません

問題例1 ：

$f(x)=7x^2-3x+5$ の臨界点は求めなさい。それは極大値か極小値を求めなさい。

一次導関数

$$f'(x)=14x-3$$

この関数 $f(x)$ の臨界点は $f'(x)=0$ を求める。

$$\text{臨界点:}\quad f'(x)=14x-3=0\rightarrow x=\frac{3}{14}$$

となる。

2次導関数

$$f''(x)=14,\ f''(\frac{3}{14})=14>0$$

ですから、$f(x)$ は、$\frac{3}{14}$ においての極小値となる。

問題例2 ：

$f(x)=x^3-2x^2+x+1$ の臨界点を求めなさい。それは極大値か極小値を求めなさい。

一次導関数

$$f'(x)=3x^2-4x+1$$

この関数 $f(x)$ の臨界点は $f'(x)=0$ を求める。

$$\text{臨界点:}\quad f'(x)=3x^2-4x+1=0\rightarrow\ x=1,\ x=\frac{1}{3}$$

となる。

2次導関数

$$f''(x)=6x-4,\ f''(1)=2>0,\ \ f''(\frac{1}{3})=-2<0$$
ですから、$f(x)$は、1においての極小値となり、1/3においての極大値となる。

問題例3:

　関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ の極値を求めなさい。それは極大値か極小値を求めなさい。

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(4-x^2)^{-3/2}(-2x)=\frac{x}{(4-x^2)^{3/2}},\ f'(x)=0\rightarrow x=0$$

$-2<x<2$ の定義域での臨界点は $x=0$ である。

$$f''(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{4-x^2}}+\frac{3x}{\sqrt[5]{4-x^2}},\ f''(0)=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}>0$$
ですから、$f(x)$は、0においての極小値となる。