数学:解析学

関数 (定義域、値域、極限値、グラフ)

$y = f(x) = \frac{sin(x)}{x}$

定義域(Domain) : $(-\infty, +\infty) - \{0\}$ or $\forall x \in R : x \neq 0$

値域(Range): $[-0.21, 1]$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

似ている関数:

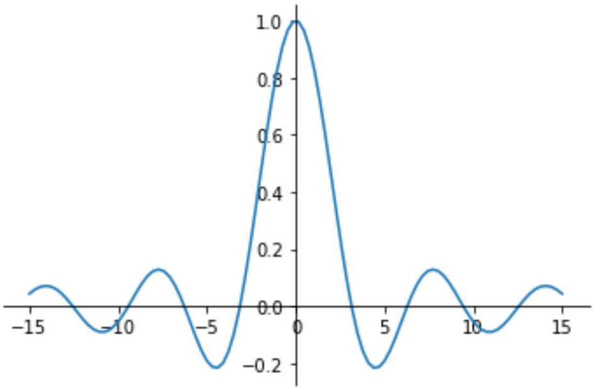
$y = f(x) = 2\frac{sin(x)}{x}$

$y = f(x) = 3\frac{sin(x)}{x}$

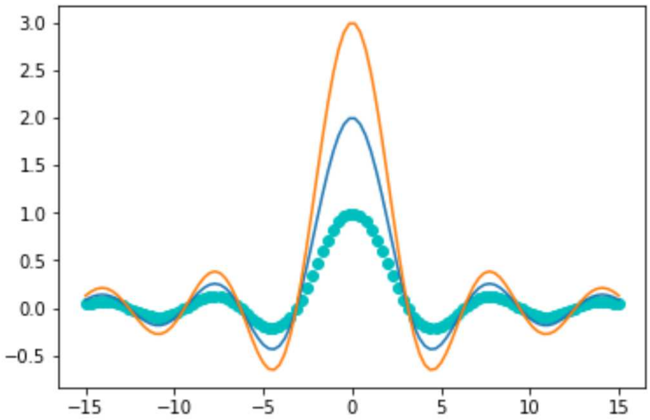
In [0]:
```
import pylab
import numpy
```

In [0]:
```
def my_plot(x,y):
  ax = pylab.gca()  # gca stands for 'get current axis'
  ax.spines['right'].set_color('none')
  ax.spines['top'].set_color('none')
  ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
  ax.spines['bottom'].set_position(('data',0))
  ax.yaxis.set_ticks_position('left')
  ax.spines['left'].set_position(('data',0))

  pylab.plot(x,y)
  pylab.show()
```

In [3]:
```
x = numpy.linspace(-15,15,100) # 100 linearly spaced numbers
y = numpy.sin(x)/x # computing the values of sin(x)/x

# compose plot
#pylab.axis('normal')
my_plot(x,y)  # sin(x)/x
pylab.show()  # show the plot
```



In [4]:
```
pylab.plot(x,y,'co') # sin(x)/x function with cyan dots
pylab.plot(x,2*y,x,3*y) # 2*sin(x)/x and 3*sin(x)/x
pylab.show() # show the plot
```



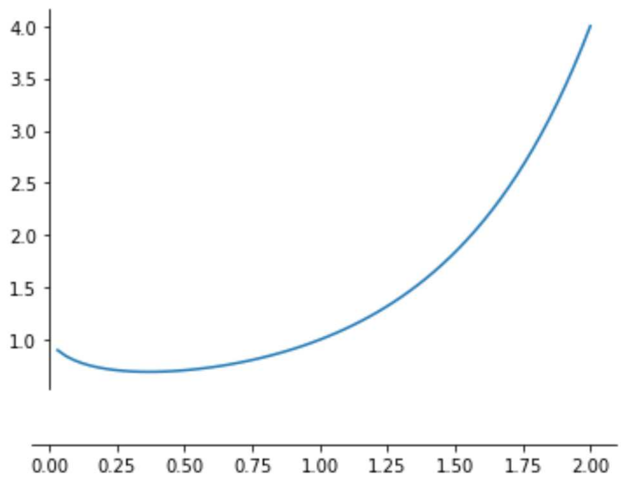
$y = f(x) = x^x$

定義域(Domain) : $(0, +\infty)$

値域(Range): $(1, +\infty)$

$\lim_{x \to 0} f(x)$

In [5]:
```
x = numpy.linspace(-1,2,100) # 100 linearly spaced numbers
x = x[x > 0] # only positive numbers
y = x**x
my_plot(x,y) # x^x
```



極限値計算のプログラム

In [6]:
```
def f(x):
  return x**x

def limit(f,val):
  return int(f(val))

print("limit f(x), x->0 is ",limit(f,0))
```

```
limit f(x), x->0 is  1
```

In [7]:
```
import numpy

def f(x):
  return numpy.sin(x)/x

print("limit f(x), x->0 is ",limit(f,10**-20))
```

```
limit f(x), x->0 is  1
```

Pythonライブラリ(sympy)でシンボル的な数学(Symbolic Math with Python sympy library)

In [0]:
```
# try it out:
import sympy
sympy.init_printing()
x = sympy.symbols('x')
```

In [0]:
```
from IPython.display import Math, HTML

def load_mathjax_in_cell_output():
  display(HTML("<script src='https://www.gstatic.com/external_hosted/"
               "mathjax/latest/MathJax.js?config=default'></script>"))
get_ipython().events.register('pre_run_cell', load_mathjax_in_cell_output)
```

In [10]:
```
print("limit of f(x)=x^x x->0 is:")
sympy.limit(x**x,x,0)
```

```
limit of f(x)=x^x x->0 is:
```

Out[10]: 1

In [11]:
```
print("limit of f(x)=sin(x)/x x->0 is:")
sympy.limit(sympy.sin(x)/x,x,0)
```

```
limit of f(x)=sin(x)/x x->0 is:
```

Out[11]: 1

In [0]:
```
#sympy.latex(sympy.limit(sympy.sin(x)/x,x,0))
```

In [17]:
```
f=sympy.Function('f')
f=(sympy.sqrt(x+1)-sympy.sqrt(x))*sympy.sqrt(x)
f
```

Out[17]: $\sqrt{x}\left(-\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$

In [18]:
```
sympy.limit(f,x,sympy.oo)
```

Out[18]: $\frac{1}{2}$

In [20]:
```
f=sympy.Function('f')
f=(sympy.sqrt(x+1)-sympy.sqrt(x))
f
```

Out[20]: $-\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

In [21]:
```
print("limit f(x), x->Infinity:")
sympy.limit(f,x,sympy.oo)
```

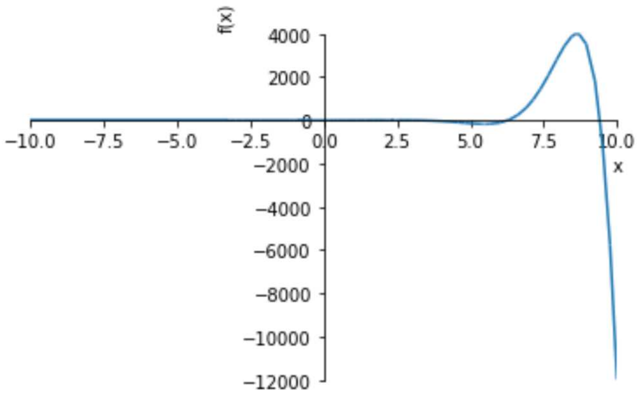
```
limit f(x), x->Infinity:
```

Out[21]: 0

In [22]:
```
f=sympy.Function('f')
x = sympy.symbols('x')
f=sympy.sin(x)*sympy.exp(x)
f
```

Out[22]: $e^{x} \sin{\left(x \right)}$

In [23]:
```
import sympy.plotting.plot as splt
#x1 = numpy.linspace(-1,2,100) # 100 linearly spaced numbers
p1=splt(f,show=False)
p1.show()
```



関数の連続性、微分、導関数、微分係数、極大、極小

関数の連続性(Continuity of a function)

- 定義１:

関数$f(x)$が$x=a$において連続であるとは$lim_{x->a}f(x)=f(a)$が成り立つことである

- 定義2:

関数$f(x)$が区間Iで連続とは、区間Iの各点で連続になることである

- 定理１:

関数$f(x)$が$x=a$で連続、$z=g(y)$が$y=f(a)$で連続のとき、合成関数$z=g(f(x)=g\circ f(x)$は$x=a$で連続である

- 定理１:

関数$f(x)$が$x=a$で連続、$z=g(y)$が$y=f(a)$で連続のとき、合成関数$z=g(f(x)=g\circ f(x)$は$x=a$で連続である

- 定理２:

関数$y=f(x)$が閉区間$[a,b]$において連続で、$f(a)\neq f(b)$ならば、$f(x)$は$f(a)$と$f(b)$の中間の任意の値をとる。

- 定理３:

関数$y=f(x)$が閉区間$[a,b]$において連続ならば、$f(x)$有界であり、$[a,b]$において最大値、最小値をとる。

$f(x)=e^x sin(x)$ の導関数が０になる時、極値がある。

$f'(x)=0, x$の値?

In [24]:
```
# find the minimum or maximum of a function by solving f'(x)=0
df = f.diff(x)
sln=sympy.solve(sympy.simplify(df),x)
print(sln)
```

```
[zoo, -pi/4, 3*pi/4]
```

In [25]:
```
min_max=[]
for i in range(0,4):
  min_max.append(((-1/4+i)*numpy.pi,f.subs(x,(-1/4+i)*numpy.pi))) #.evalf()
min_max
```

Out[25]: $[(-0.7853981633974483,\ -0.322396941944834),\ (2.356194490192345,\ 7.460488539293$
$(5.497787143782138,\ -172.640872178161),\ (8.63937979737193,\ 3995.0293589297$

$f(3\frac{\pi}{4})$, $f'(3\frac{\pi}{4}+2\pi)$,$f(3\frac{\pi}{4}+2\pi)$

In [26]:
```
f.subs(x,3*numpy.pi/4)
```

Out[26]: 7.4604885392934

In [27]:
```
3*numpy.pi/4+2*numpy.pi
```

Out[27]: 8.63937979737193

In [28]:
```
df.subs(x,3*numpy.pi/4+2*numpy.pi)
```

Out[28]: $9.54969436861575 \cdot 10^{-12}$

In [29]:
```
f.subs(x,3*numpy.pi/4+2*numpy.pi)
```

Out[29]: 3995.02935892975

In [0]:
```

```

指数関数$y = e^x$は連続かつ狭義の単調増加である。逆関数が自然対数$log(x)$で、定理より連続かつ狭義単調増加関数になる。

（1）$lim_{x->0} \frac{log(1+x)}{x}$

（2）$lim_{x->0} \frac{e^x-1}{x}$

関数の微分法

導関数

変化を科学的に扱うには何らかの量を関数として表す必要がある。その関数の変化の様子を詳しく調べるのが「微分」である。変化は差をとるということである。ＧＰＳによりリアルタイムで自分の位置を正解に知ることができる。

* 定義 1:

区間Iの点$x = a$で、極限値 $lim_{x->a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在する時、この極限値を$f'(a)$　と書き、aにおける$f(x)$の微分係数(differential coefficient)または微分商(differential quotient)という。またこのとき、$f(x)$は$x = a$で微分可能(differentiable)であるという。

* 定義 2 :

関数$f(x)$が区間Iの各点で微分可能なとき、極限値 $lim_{h->0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$が$f'(x)$　と書き、$f(x)$の導関数(derived function)という。

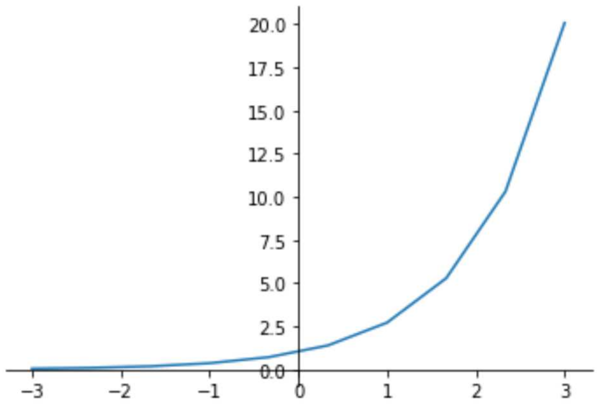
In [2]:
```
import sympy
f=sympy.Function('f')
h = sympy.symbols('h')
x = sympy.symbols('x')
f=sympy.exp(x)
d =(sympy.exp(x+h)-sympy.exp(x))/h
d
```

Out[2]: $$\frac{-e^x + e^{h+x}}{h}$$

In [31]:
```
# compute the limit when h->0
sympy.limit(d,h,0)
```

Out[31]: e^x

In [32]:
```
x = numpy.linspace(-3,3,10) # 100 linearly spaced numbers
y = numpy.exp(x)
# compose plot
my_plot(x,y) #
```



In [33]:
```
f.diff()
```

Out[33]: e^{x}

In [3]:
```
f=sympy.Function('f')
x = sympy.symbols('x')
f=sympy.sin(x)*sympy.exp(x)
f
```

Out[3]: $e^{x}\sin(x)$

In [4]:
```
#f'(x)    # sympy.init_printing(use_unicode=True)
f.diff()
```

Out[4]: $e^{x}\sin(x)+e^{x}\cos(x)$

原始関数、不定積分

$F(x)=\int f(x)dx$

定数Cを除いて：

$\int xdx=\frac{x^2}{2}$

$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}$

$\int \frac{1}{x}dx=Ln(x)=\log(x)$

In [5]:
```
# try it out:
sympy.Integral(x, x)
```

Out[5]: $\int x\,dx$

In [6]:
```
print("xの原始関数：")
sympy.integrate(x, x)
```

xの原始関数：

Out[6]:
$$\frac{x^2}{2}$$

In [9]:
```
sympy.Integral(x**2, x)
```

Out[9]:
$$\int x^2\, dx$$

In [7]:
```
print("x^2の原始関数：")
sympy.integrate(x**2, x)
```

x^2の原始関数：

Out[7]:
$$\frac{x^3}{3}$$

In [10]:
```
sympy.Integral(1/x, x)
```

Out[10]:
$$\int \frac{1}{x}\, dx$$

In [8]:
```
print("1/xの原始関数：")
sympy.integrate(1/x, x)
```

1/xの原始関数：

Out[8]:
$$\log(x)$$

In [11]:
```
f=sympy.Function('f')
x = sympy.symbols('x')
f=sympy.sin(x)*sympy.exp(x)
f
```

Out[11]:
$$e^x \sin(x)$$

In [12]:
```
sympy.Integral(f, x)
```

Out[12]:
$$\int e^x \sin(x)\, dx$$

In [13]:
```
print("fの原始関数：")
sympy.integrate(f, x)
```

fの原始関数：

Out[13]:
$$\frac{e^x \sin(x)}{2} - \frac{e^x \cos(x)}{2}$$

In [14]:
```
sympy.Integral((3*x+2)**5, x)
```

Out[14]:
$$\int (3x+2)^5\, dx$$

In [15]:
```
print("(3x+2)^5の原始関数：")
sympy.integrate((3*x+2)**5, x)
```

(3x+2)^5の原始関数：

Out[15]:
$$\frac{81x^6}{2} + 162x^5 + 270x^4 + 240x^3 + 120x^2 + 32x$$

In [ ]:

```

```