極限 (情報基礎 C 2007 前期)

3. 関数の極限

3.1 極限値とは

関数 $f(x)$ において, x を x_0 に限りなく近づけていくとき, $f(x)$ がある定数 l に限りなく近づくならば, l を x が x_0 に近づくときの $f(x)$ の 極限値(limit)といい,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

で表わす。さて、ここで限りなく近づくというのはどういうことでしょうか。x が x_0 に限りなく近づくとは、絶対値 $|x - x_0|$ を限りなく小さくできるということと同じだと考えてもよい。同様に、$f(x)$ が定数 l に限りなく近づくということも $|f(x) - l|$ を限りなく小さくできることだとかんがえてもよい。そこで、限りなく小さくできるということで考えてみると、どんな小さな正の数を比較の相手と選んでも、それよりも小さくできるならば、限りなく小さくできるといえるのではないでしょうか。この考え方が数学でいうところの限りなく小さくということなのです。これを用いて関数の極限をもう一度定義する。

定義:任意の正の数 ε に対して、$0 < |x - x_0| < \delta$ のとき、$|f(x) - l| < \varepsilon$ が成り立つように正の数 δ が選べるならば、$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ である。

この定義は極限の $\varepsilon - \delta$ 定義ともいう。

例: $\varepsilon - \delta$ 定義を用いて $\lim_{x \to 1} 2x = 2$ を証明してみましょう。

解:どんな $\varepsilon > 0$ に対しても、$0 < |x - 1| < \delta$ のとき $|2x - 2| < \varepsilon$ が成り立つような δ が存在することを示せばよい。そこで、$|2x - 2|$ と $|x - 1|$ を比較すると

$$|2x - 2| = 2|x - 1|$$

よって、$\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ と選ぶと $0 < |x - 1| < \delta$ のとき

$$|2x - 2| = 2|x - 1| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となる。

例: $\varepsilon - \delta$ 定義を用いて $\lim_{x \to 1} 4x^2 = 4$ を証明してみましょう。

解: どんな $\varepsilon > 0$ に対しても, $0 < |x - 1| < \delta$ のとき $|4x^2 - 4| < \varepsilon$ が成り立つような δ が存在することを示せばよいでしょう. そこで, $|4x^2 - 4|$ と $|x - 1|$ を比較すると

$$|4x^2 - 4| = 4|x + 1||x - 1|$$

となります. そこでまず, $\delta_1 = 1$ とおくと $|x - 1| < 1$ より $|x + 1| < 3$ がいえるでしょう. 次に

$$|4x^2-4|=4|x+1||x-1|$$

となるには$|x+1|<3$より$\delta_2=\dfrac{\varepsilon}{12}$と選ぶ必要がでてきます．よって$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$．つまり$\delta$を$\delta_1$と$\delta_2$の小さいほうとなるように選ぶと，$|x-1|<\delta$のとき

$$|4x^2-4|=4|x+1||x-1|<12|x-1|<12\cdot\frac{\varepsilon}{12}=\varepsilon$$

となります．

$\lim_{x\to1}4x^2=4$を定義にもとづいて証明するのは簡単ではありませんでした．そこで定義を使わずに極限値を求められるようになるように，次の定理を学ぼう．

定理1：$\lim_{x\to x_0}f(x)=l,\ \lim_{x\to x_0}g(x)=m$とすると、

（1）$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=l\pm m$

（2）$\lim_{x\to x_0}cf(x)=cl$

（3）$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=lm$

（4）$\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{l}{m}$ $(m\neq0)$

証明：（3）の証明。どんな$\varepsilon>0$　に対しても$0<|x-x_0|<\delta$のとき，　$|f(x)g(x)-lm|<\varepsilon$が成り立つような$\delta>0$が存在することを示せばよい．

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-lm|&=|f(x)g(x)-f(x)m+f(x)m-lm|\\&=|f(x)(g(x)-m)+(f(x)-l)m|\\&\leq|f(x)||g(x)-m|+|m||f(x)-l|\\&\leq|f(x)||g(x)-m|+(1+|m|)|f(x)-l|\end{aligned}$$

ここで，$\lim_{x\to x_0}f(x)=l,\ \lim_{x\to x_0}g(x)=m$より，どんな$\varepsilon>0$に対しても，

(i)　$0<|x-x_0|<\delta_1$のとき，$|f(x)-l|<1$となる$\delta_1>0$が存在する．

(ii)　$0<|x-x_0|<\delta_2$のとき，$|f(x)-l|<\dfrac{\varepsilon}{2(1+|m|)}$となる$\delta_3>0$が存在する．

(iii)　$0<|x-x_0|<\delta_3$のとき，$|g(x)-m|<\dfrac{\varepsilon}{2(1+|l|)}$となる$\delta_3>0$が存在する．

よって$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$とすると，$0<|x-x_0|<\delta$のとき，

$$|f(x)g(x)-lm| \le |f(x)||g(x)-m| + (1+|m|)|f(x)-l|$$
$$< (1+|l|)\left(\frac{\varepsilon}{2(1+|l|)}\right) + (1+|m|)\left(\frac{\varepsilon}{2(1+|m|)}\right) = \varepsilon$$

となる。

例：上の定理によって $\lim_{x\to 1} 4x^2 = 4$ を見てみましょう。

解：$\lim_{x\to 1} 2x = 2,\ \lim_{x\to 1} 2x = 2$。よって定理より

$$\lim_{x\to 1} 4x^2 = (\lim_{x\to 1} 2x)(\lim_{x\to 1} 2x) = 4$$

となります。

例：$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ の極限値を求めてみましょう。

解：まず、$x \to 2$ のとき、$x^2-3x+2 \to 0$。また $x^2-4 \to 0$。つまり、分子、分母とも $x-2$ を共通因子に持っていることがわかる。そこで分子、分母から $x-2$ をくくりだすと

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2 4} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

実際に極限値を求めるには上の定理だけでは不十分です．例えば、$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ の極限値は定理1からは求められません．そんなとき便利なものに，次のようなものがあります．

定理2：（はさみうちの定理）x_0 の δ 近傍 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ で $f(x) < h(x) < g(x)$ であって、

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l$$

ならば、$\lim_{x\to x_0} h(x) = l$ である。

証明：どんな $\varepsilon > 0$ に対しても，$0 < |x-x_0| < \delta$ のとき、$|h(x)-l| < \varepsilon$ が成り立つような $\delta > 0$ が存在することを示せばよい．

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ より，どんな $\varepsilon > 0$ に対しても $\delta_1 > 0$ が存在し，$0 < |x-x_0| < \delta_1$ のとき，$|f(x)-l| < \varepsilon$ である．

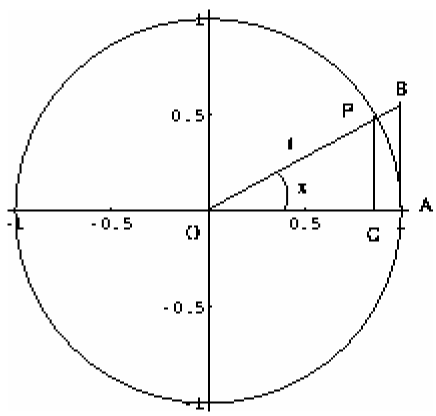
同様に，$\lim_{x\to x_0} g(x) = l$ より，どんな $\varepsilon > 0$ に対しても $\delta_2 > 0$ が存在し，$0 < |x-x_0| < \delta_2$ のとき，$|g(x)-l| < \varepsilon$ である．よって $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ とおくと，

$$l-\varepsilon < f(x) < h(x) < g(x) < l+\varepsilon$$

より、$0 < |x-x_0| < \delta$ のとき、$|h(x)-l| < \varepsilon$ が成り立つ。

例：はさみうちの定理を理解するために、$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ を求めてみましょう。

解：図において原点をOとし、単位円の周上にA(1, 0)、Pを取り、OPの延長線とOAに垂直な線の交点を B とします．またP から下ろした OA への垂線と OA の交点を C とします．そのとき，面積を比較すると$\Delta OPC <$ 扇形$OAP < \Delta OAB$ が成り立ちます．ここで，



$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ に対して，

$$\begin{array}{ccccccc} \dfrac{\cos x \cdot \sin x}{2} & < & \dfrac{x}{2} & < & \dfrac{\tan x}{2} & = & \dfrac{\sin x}{2\cos x} \\ \Delta OPC\text{面積} & & \text{扇形}OAP\text{面積} & & \Delta OAB\text{面積} & & \end{array}$$

より，

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

となります。また、この不等式は$-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ について成り立つ。さて、何を行ったかというと、$\dfrac{\sin x}{x}$ を二つの関数ではさみつけた。そして $\dfrac{\sin x}{x}$ をはさむのに用いた $\cos x$ と $\dfrac{1}{\cos x}$ の $x \to 0$ のときの極限値を調べると1になることがわかる。よって $\cos x$ と $\dfrac{1}{\cos x}$ の間にはさまれた $\dfrac{\sin x}{x}$ も $x \to 0$ のときに1に近づくのではなか、というのがはさみうちの定理なのである。よって

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

3.2　演習問題

1.　次の極限値を求めよう。

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x^2+4x)$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

解：

(a)

$$\lim_{x\to 2}(x^2+4x) = \lim_{x\to 2}x^2 + \lim_{x\to 2}4x = 4+8 = 12$$

(b)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

(c)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=2\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{(1+x)-(1-x)}=2\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}$$

$$=2\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=2\frac{1}{\sqrt{1+1}+\sqrt{1-1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$を用いて$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$極限値を求めよう。

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$