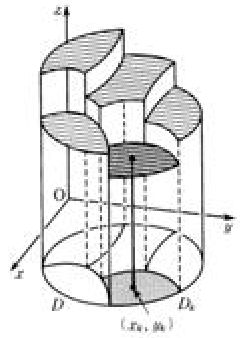
二重積分 (Double Integral)

6.5 二重積分 (Double Integral)

二重積分は定積分と同様に，二重積分なるものを考えよう．

いま，xy-平面の領域 D で $f(x,y) \geq 0$ のとき，曲面 $z = f(x,y)$ が，領域 D とのあいだに作る立体の体積を念頭において，二重積分を定義する．



領域 D を n 個の小領域 $D_1, D_2 ..., D_n$ に分割し，各小領域 D_k 内に，代表点 $P_k(x_k, y_k)$ をとり，n 個の細長い柱の体積の総和

$f(x_1, y_1)D_1 + \cdots + f(x_n, y_n)D_n$

を作る．このとき，各小領域 D_k がどの方向の幅も→0 になるように分割をドンドン細かくするとき，分割の仕方や，代表点の選び方によらず，上の値が一定値に限りなく近づくならば，この一定値のことを，領域 D における関数 $f(x,y)$ の（二重）**積分**とよび，

$$\iint f(x,y)dxdy$$

と記す．このとき，D を**積分領域**，$f(x,y)$ を**被積分関数**とよぶ．

この二重積分は定積分と同様に，各種の線形性（加法性）をもつ：

1) 二つの領域 A，B が境界以外に共有点をもたなければ，

$$\iint_{A\cup B} f(x,y)dxdy = \iint_A f(x,y)dxdy + \iint_B f(x,y)dxdy$$

2)

$$\iint_D (f(x,y) + g(x,y))\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_D g(x,y)\,dxdy$$

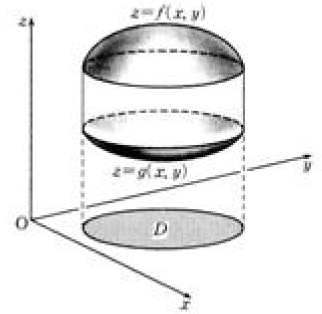
$$\iint_D k\,f(x,y)\,dxdy = k\iint_D f(x,y)\,dxdy \quad k:\text{定数}$$

二重積分の意味と応用

立体の体積をモデルに二重積分を考えたのだから，二重積分の応用として，まず，体積が考えられる．

●体　積：xy-平面の領域 D で $f(x,y) \geq g(x,y)$ のとき，二曲面 $z = f(x,y)$，$z = g(x,y)$ ではさまれた D の部分の体積Ｖは，

$$V = \iint f(x,y)\,dxdy - \iint g(x,y)\,dxdy$$



●領域Dで定義された量$f(x,y)$に対して，各微小領域Dにおける$f(x,y)$の総量の総計の極限が，$f(x,y)$のDにおける二重積分だから，その応用は広い．たとえば，$f(x,y)$を地点(x,y)の人口密度とすれば，地域Dの総人口は，

$$\iint f(x,y)dxdy$$

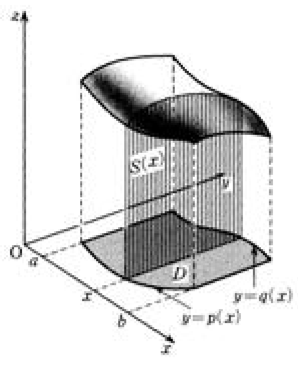
累次積分：体積をモデルに二重積分の実用的な計算法を考える．図のような立体のx軸に垂直な平面による切口の面積を$S(x)$とすれば，

$$S(x)=\int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)\,dy$$

$$V=\int_a^b S(x)\,dx$$

だから，次の結果が得られる：

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\left(\int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dy\right)dx$$



例題：

1）次の二重積分Iを計算せよ。

$$\iint_D \frac{x}{y^2}\,dxdy \qquad D: x^2 \le y \le x,\ \ \frac{1}{3} \le x \le 1$$

解:

$$I = \iint_D \frac{x}{y^2}\,dxdy \qquad\qquad D: x^2 \le y \le x,\quad \frac{1}{3} \le x \le 1$$

$$I = \int_{\frac{1}{3}}^{1} x\left(\int_{x^2}^{x} \frac{1}{y^2}\,dy\right)dx = \int_{\frac{1}{3}}^{1} x\left(\left[-\frac{1}{y}\right]_{x^2}^{x}\right)dx = \int_{\frac{1}{3}}^{1} x\left(\left[-\frac{1}{x} - (-\frac{1}{x^2})\right]\right)dx$$

$$I = \int_{\frac{1}{3}}^{1} \left(\left[-1 + \frac{1}{x}\right]\right)dx = \left[-x + \log x\right]_{\frac{1}{3}}^{1} = \left[-1 + \log 1\right] - \left[-\frac{1}{3} + \log\frac{1}{3}\right]$$

$$I = -1 + \frac{1}{3} - \log\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} + \log 3$$

2) 円柱 $x^2 + y^2 = a^2$ の xy -平面の上部、平面 $z = 2y$ の下部にある部分の体積 V を求めよ。($a > 0$)

解:

$$D: 0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2},\quad -a \le x \le a$$

とすれば、求める体積 V は、

$$V = \iint_D 2y\,dxdy$$

$$V = \int_{-a}^{a}\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} 2y\,dy\right)dx = \int_{-a}^{a}\left(\left[y^2\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx = \int_{-a}^{a}\left(\left[a^2 - x^2\right]\right)dx$$

$$V = \left(\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a}\right) = (a^2a - \frac{a^3}{3}) - (a^2(-a) - \frac{(-a)^3}{3}) = 2a^3 - \frac{2a^3}{3}$$

$$V = \frac{4}{3}a^3$$