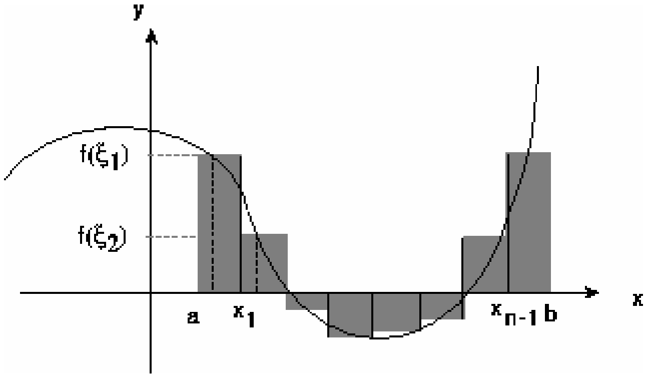
定積分 (Definite Integral)

6.1　定積分 (Definite Integral)

$f(x)$ は閉区間$[a,b]$で定義されているとします．この区間$[a,b]$を次のような点 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ で n 個の小区間に分割する。

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b$

この分割を Δ で表わし，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ のうちで最も大きい値を$|\Delta|$で表わす．いま，それぞれの小区間$[x_{i-1}, x_i]$のなかに任意の点　ξ_i をとり，Riemann 和(Riemann sum)　とよばれる次の和を考える．



$$S(\Delta) = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

このとき，

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S(\Delta) = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S$$

となる実数 S が存在するならば，この S を $f(x)$ の定積分(definite integral)といい，　$f(x)$ は$[a,b]$で積分可能(integrable)であるという．また，この S を次のように表わす．

$$S = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

つまり関数 $f(x)$ が$[a,b]$で積分可能であるということは、分割の仕方および点$\xi_i (i=1,2,\cdots,n)$ のとり方に関係なく一通りに定まるということである．では，どんな関数が$[a,b]$で積分可能になるのであろうか．次の定理はそんな疑問に答えてくれる．

定理1：$f(x)$ が$[a,b]$で連続ならば、$[a,b]$で積分可能である。

今後，特に断らない限りこの章にでてくる $f(x), g(x)$ などの関数は，考えている区間で連続であるとする．　定積分の定義より，ただちに次の公式が得られる．

定理2：$f(x), g(x)$ は区間$[a,b]$で連続であるとすると、

(1) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f8x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(2) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$（$c$ ：定数）

(3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

(4) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

(5) $[a,b]$で $f(x) \geq g(x)$ ならば、$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

証明

(1) $a<b$ の場合．$[a,b]$ の任意の分割を

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_i<\cdots<x_n=b$$

とし，ξ_i を $[x_{i-1},x_i]$ 内の任意の点として Riemann 和を考えると，

$$\sum_{i=1}^{n}\{f(\xi_i)+g(\xi_i)\}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i$$

ここで，$|\Delta|\to 0$ とすると，定理1より，

$$\int_a^b f(x)+g(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\lim_{|\Delta|\to 0}\{-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_{i-1}-x_i)=-\int_b^a f(x)dx$$

6.2 微分積分学の基本定理

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続であるとき，$[a,b]$ 内の任意の点 x に対して定積分 $\int_a^x f(t)dt$ を考えると，これは $[a,b]$ を定義域にもつ関数になる．この関数について，次の定理が成り立つ．

定理3：$f(x)$ が $[a,b]$ で連続であれば、$\int_a^x f(t)dt$ は x について微分可能であって、

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)\quad(a\le x\le b)$$

となる。

証明：

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ とおくと，$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$ は $F(x)$ の導関数を求めることになるので，$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ を考えます．まず，　$h>0$ のとき，

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}=\frac{\int_x^{x+h}f(t)dt}{h}$$

ここで M_h を $[x,x+h]$ における $f(x)$ の最大値，m_h を $[x,x+h]$ における $f(x)$ の最小値とすると(なぜ最大値，最小値が存在するとわかる?)，$[x,x+h]$ で

$$m_h\le f(x)\le M_h$$

したがって，定理2より

$$m_h[(x+h)-x]\le\int_x^{x+h}f(t)dt\le M_h[(x+h)-x]$$

となる．そこで，両辺を h でわると，仮定より，$f(x)$ は $[x,x+h]$ で連続なので，

$$\lim_{h\to 0+}m_h=f(x)=\lim_{h\to 0+}M_h$$

よって，はさみうちの定理より

$$\lim_{h\to 0+}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$

同様に $h<0$ のとき

$$\lim_{h\to 0-}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$

となり，$F(x)$ は微分可能であり，$F'(x)=f(x)$ となる．

この定理より，$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ は $f(x)$ の原始関数となります．よって，連続な関数は必ず原始関数をもっていることがわかり，その原始関数は定積分で与えられる．

例：$f(t)$ が連続のとき

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x^2} f(t)dt$$

を求めてみよう。

解：まず，$u=x^2$ とおくと $du=2xdx$．よって

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x^2} f(t)dt=\frac{d(\int_a^u f(t)dt)}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f(x^2)(2x)$$

定理4：(微分積分学の基本定理) 閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ の一つの原始関数を $G(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)$$

である。

証明：定理 3 より，$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ も $f(x)$ の原始関数である．よって，原始関数定理より $F(x)=G(x)+c$ (c：定数)．ここで $F(a)=0$ だから，$F(a)=G(a)+c=0$．よって，$c=-G(a)$．このとき $F(x)=G(x)-G(a)$ となるから，$x=b$ とすると，

$$F(b)=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)$$

ここで，$G(b)-G(a)$ は $G(x)|_a^b$ または $[G(x)]_a^b$ と略記される．

この定理より，定積分の計算は被積分関数の不定積分を求め，積分範囲の端点を代入しその差を求めればよいことがわかる．

例：次の定積分の値を求めてみよう。

$$\int_0^1 (2x-3)dx$$

解:

$$\int_0^1 (2x-3)dx = [x^2-3x]_0^1 = 1-3 = -2$$

6.3 定積分の計算

不定積分の置換積分と部分積分についてすでに学んだので，ここでは定積分の置換積分と部分積分についての話から始める．

定理5：(置換積分法) $x=\phi(t)\ \ (a \le t \le b)$ **のとき次の式が成り立つ**

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f\{\phi(t)\}\phi'(t)dt$$

証明： $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると，$F(\phi(t))$ は $f(\phi(t))\phi'(t)$ の原始関数である．したがって，微分積分学の基本定理より，

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

定理6：(部分積分法) $u=f(x),\quad v=g(x)$ **について次の式が成り立つ**

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

証明:

$$\int_a^b udv + \int_a^b vdu = \int_a^b uv'dx + \int_a^b u'vdx = \int_a^b (uv'+u'v)dx = \int_a^b (uv)'dx = [uv]_a^b$$

例：次の定積分の値を求めてみう。

$$\int_0^1 3x^2(x^3+1)^4 dx$$

解：$t=x^3+1$ とおくと、$dt=3x^2dx$ となるので、被積分関数は t^4 で表わすことができる．また積分範囲は $0 \to 1$ のとき，$t=x^3+1$ なので $t:1 \to 2$ となる．よって

$$\int_0^1 3x^2(x^3+1)^4 dx = \int_1^2 t^4 dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_1^2 = \frac{32-1}{5} = \frac{31}{5}$$

定積分でよく使われる積分に次のものがあります．

定理7：

(1) $f(x)$ が偶関数ならば、$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

(2) $f(x)$ が奇関数ならば、$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

証明：

(1) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$ と表わせるので, $f(x) = f(-x)$ より

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

ここで, $t = -x$ とおくと $dt = -dx$. また, $x : -a \to 0$ より $t = -x : a \to 0$. よって

$\int_{-a}^{0} f(-x)dx = -\int_{a}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt$. これより,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

(2) 証明は同じ手法である。

例：次の定積分の値を求めてみよう。

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin x dx$$

解：

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin x dx = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x d\cos x = -\left[\frac{\cos^5 x}{5}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 0 - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

6.4 定積分の応用

ここでは, 定積分の応用として, 面積, 体積, 曲線の長さなどについて考えてみよう. まずは面積から考えよう。

6.4.1 面積

閉区間 $[a,b]$ で常に $g(x) \leq f(x)$ のとき, 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ および 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた部分の面積を A とし定積分で表わしてみよう. まず $[a,b]$ の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

をとり, 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ から任意の点 ξ_i をとる. ここで底辺 $x_i - x_{i-1}$, 高さ $f(\xi_i) - g(\xi_{i)}$ の長方形を考え,

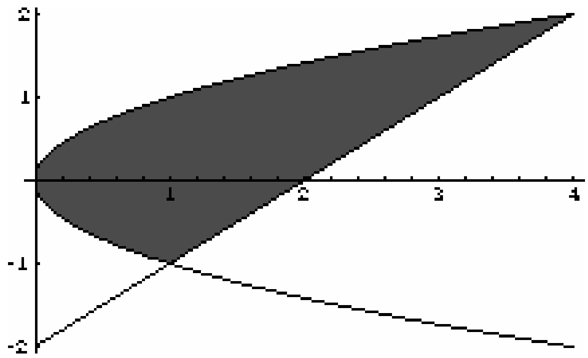
その和を作ると

$$\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)](x_i - x_{i-1})$$

ここで分割 Δ を細かくすると, この和は

$$A = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]dx$$

に収束するので面積を表わす. また、実際に面積を求めるときには, 横に長い長方形を考えることもある. 例えば次のような場合である.



例：次の曲線で囲まれた図形の面積を求めてみよう

$$x = y^2, \qquad y = x - 2$$

解：

この図で縦方向の長方形を考えると $x = y^2, y = x - 2$ の交点を通る直線 $x = 1$ より左側では, 長方形の高さが $\sqrt{x} - (-\sqrt{x})$ となり, 右側では $\sqrt{x} - (x-2)$ となる. よって, 求める面積 A は

$$A = \int_0^1 2\sqrt{x}dx + \int_1^4 [\sqrt{x} - (x-2)]dx = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^4$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{3}{2}[4^{\frac{3}{2}} - 1] - \frac{1}{2}[4^2 - 1] + 2[4-1]$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{14}{3} - \frac{15}{2} + 6 = \frac{9}{2}$$

次に, 横方向の長方形を考えると, 長方形の高さは求める図形内のすべての範囲で $y + 2 - y^2$, 幅は Δy となり, 計算が簡単になる. 実際 $x = y^2, y = x - 2$ の交点を求めると, $y^2 = y + 2$ より $y^2 - y - 2 = (y+1)(y-2) = 0$. よって $y = -1, 2$ となります. これより求める面積 A は

$$A = \int_{-1}^2 (y + 2 - y^2)dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$

6.4.2. 体積

次に体積を考えてみましょう. x 軸に垂直な平面で切ったときの切り口の面積が $A(x)$ となるような空間図形を考える. この空間図形の $a \le x \le b$ の部分の体積を定積分で表わしてみよう. まず $[a, b]$ の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

をとり, 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ から任意の点 ξ_i をとる. この図形の $x_{i-1} \le x \le x_i$ の部分を底面積 $A(\xi_i)$, 高さ $x_i - x_{i-1}$ で置き換えて, その体積の和を作ると,

$$\sum_{i=1}^n A(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

ここで分割 Δ を細かくすると, この和は

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

に収束する。