定積分（Definite Integral）(2008/07/10)

6.3　定積分の計算

不定積分の置換積分と部分積分についてすでに学んだので，ここでは定積分の置換積分と部分積分についての話から始める．

定理5：(置換積分法) $x=\phi(t)\ \ (a\le t\le b)$ **のとき次の式が成り立つ**

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx=\int_a^b f\{\phi(t)\}\phi'(t)dt$$

証明：　$F(x)$を $f(x)$ の原始関数とすると，$F(\phi(t))$ は $f(\phi(t))\phi'(t)$ の原始関数である．したがって，微分積分学の基本定理より，

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt=F(\phi(b))-F(\phi(a))=\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

定理6：(部分積分法) $u=f(x),\quad v=g(x)$ **について次の式が成り立つ**

$$\int_a^b udv=[uv]_a^b-\int_a^b vdu$$

証明：

$$\int_a^b udv+\int_a^b vdu=\int_a^b uv'dx+\int_a^b u'vdx=\int_a^b (uv'+u'v)dx=\int_a^b (uv)'dx=[uv]_a^b$$

例：次の定積分の値を求めてみう。

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

解：部分積分法を用いて問題を解く．よって

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\times 1\times dx=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\times (x)'\times dx=\left[\sqrt{1-x^2}\times x\right]_0^1-\int_0^1 (\sqrt{1-x^2})'\times x\times dx$$

次の微分をまず計算する。

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\left(\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'=\left(\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}-1}(1-x^2)'\right)=\left(\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\right)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

その結果をもとの積分に入れ換わる。

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\left[\sqrt{1-x^2}\times x\right]_0^1-\int_0^1 \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\times x\times dx=\left[x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1-\int_0^1 \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\left[x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1-\int_0^1\left(\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\right)dx$$

ここは０と同じですから、成り立つ

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \left[x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\sin^{-1}(x)\right]_0^1$$ これを知っておく。

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\sin^{-1}(x)\right]_0^1$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\sin^{-1}(x)\right]_0^1$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[1\sqrt{1-1^2} - 0\sqrt{1-0^2}\right] + \frac{1}{2}\left[\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(0)\right]$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[1\sqrt{0} - 0\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right]$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{4}$$