積分法 (integration)

5.1　不定積分 (Indefinite integrals or antiderivatives)

ある区間で定義されている関数 $f(x)$ に対して、この区間のすべての x について

$$F'(x)=f(x)$$

が成り立つような関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数(primitive function) という。例えば、$\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=x^2$ なので、$\dfrac{x^3}{3}$ は $f(x)=x^2$ の原始関数である。同様に、$\left(\dfrac{x^3}{3}+1\right)'=x^2$ となるので $\dfrac{x^3}{3}+1$ も $f(x)=x^2$ の原始関数である。ここで定数 c の導関数は0であることに注意すると $\left(\dfrac{x^3}{3}+c\right)'=x^2$ となり、$\dfrac{x^3}{3}+c$ も $f(x)=x^2$ の原始関数である。

この他にも $f(x)=x^2$ の原始関数はあるのでしょうか。そんな疑問に次の定理は答えてくれる。

定理1：$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の一つとすると、$f(x)$ のすべての原始関数は $F(x)+c$ の形で与えられる。ただし、c は任意の定数である。

$f(x)$ の原始関数全体を $f(x)$ の不定積分(indefinite integral)といい、$\int f(x)dx$ で表す。つまり、$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数の一つならば、定理1より、

$$\int f(x)dx=F(x)+c \qquad (c:\text{ある定数})$$

となる。また、$f(x)$ の不定積分を求めることを、$f(x)$ を積分する(integrate)といい、上の式に出てくる定数 c を積分定数(constant of integration) という。なお不定積分を求めることができるということは、原始関数を初等関数だけを用いて表すことができるということである。

原始関数の定義をみると、変数が x であることは特別重要なことではないことに気づく。例えば、関数 $f(x)$ を考えてみてください。ここで t についての導関数が $F'(t)=f(t)$ となる関数 $F(t)$ があれば、これは $f(t)$ の原始関数となり、

$$\int f(t)dt=F(t)+c$$

が成り立つ。このように dx や dt はどの変数について積分したかを表していて、ダミー変数(dummy variable)と呼ばれる。

ここで、不定積分とは何かが分かったと思うので、次の例題を見てみよう。

例：$\int(\cos x+x)dx$ を求めてみよう。

解：$F'(x)=\cos x+x$ となる $F(x)$ を求める。

$$(\sin x)' = \cos x,\quad (\frac{x^2}{2})' = x$$

また、和の導関数は導関数の和より

$$(\sin x + \frac{x^2}{2})' = \cos x + x$$

よって、

$$F(x) = \sin x + \frac{x^2}{2} + c$$

次の不定積分を求めるのに有用な基本的な公式をあげておく。これらは右辺を微分することにより確かめることができる。

定理2（積分公式）

(0) $\int 0dx = c,\ \int 1dx = x + c, \int adx = ax + c$

(1) $\int x^n dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad (a \neq -1)$

(2) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$

(3) $\int e^x dx = e^x + c$

(4) $\int \sin xdx = -\cos x + c$

(5) $\int \cos xdx = \sin x + c$

(6) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

(7) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$

(8) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + c$

証明：

(1) $(\frac{x^{a+1}}{a+1} + c)' = x^a$ より $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$

ここで、積分公式の(1)から(5)までは是非覚えよう。あとのは次に習う積分を用いることにより導くことができるので、できれば導き方を学びよう。

積分公式を使って積分をするとき、次の定理は便利である。

定理3：連続関数 $f(x), g(x)$ において、次の式が成り立つ。

(1) $\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm g(x)dx$

(2) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$

証明：(1)

$$\frac{d}{dx}(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx) = \frac{d}{dx}\int f(x)dx \pm \frac{d}{dx}\int g(x)dx = f(x) \pm g(x)$$

これより、$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ は $f(x) \pm g(x)$ の不定積分である。(2)の証明も同様にできる。

例: $\int (3\sin x + x^2)dx$ を求めてみよう。

解:

$$\int (3\sin x + x^2)dx = \int 3\sin x dx + \int x^2 dx$$
$$= 3\int \sin x dx + \int x^2 dx = -3\cos x + \frac{x^3}{3} + c$$

例: $\int (3x^{-3} + 4x^5)dx$ を求めてみよう。

解:

$$\int (3x^{-3} + 4x^5)dx = 3\int x^{-3}dx + 4\int x^5 dx$$
$$= 3\frac{x^{-2}}{-2} + 4\frac{x^6}{6} + c = \frac{2}{3}x^6 - \frac{3}{2}x^{-2} + c$$

例: $\int (t^3 + \frac{1}{t^2+1})dt$ を求めてみよう。

解:

$$\int (t^3 + \frac{1}{t^2+1})dt = \int t^3 dt + \int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{t^4}{4} + \tan^{-1} t + c$$

5.2　置換積分法

不定積分 $\int f(x)dx$ を求めるときに、被積分関数 $f(x)$ の原始関数が四則の演算により積分公式の形に直せないことがよくある。そんなとき、$f(x)dx$ の x をある t の関数 $\phi(t)$ に置き換えることによる、$f(x)dx$ を $f(\phi(t))\phi'(t)dt$ という。積分公式を用いることにより積分できる形に変形することを置換積分法 (integration by substitution) という。

定理 4 (置換積分法): $f(x)$ が連続であるとき、$x = \phi(t)$ とおくと、$\phi(t)$ が微分可能であれば、$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$ が成り立つ。

証明:

$\int f(x)dx = F(x)$ とすると、$F'(x) = f(x)$ である。そこで $x = \phi(t)$ とおき、$F(\phi(t))$ を考えると、

$$\frac{d}{dt}F(\phi(t)) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$$

となるので、

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t)) = F(x) = \int f(x)dx$$

となる。

この定理により、$\int f(x)dx$ を求めるのに、$x=\phi(t)$ とその微分 $dx=\phi'(t)dt$ をもとの式に形式的に代入し、

$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt$ としてこれを計算すればよいことがわかる。

例：$\int \frac{2x+1}{x^2+x}dx$ を求めてみよう。

解：このままの形では、積分公式のどれも使えないことがわかる。そこで $t=x^2+x$ とおく。すると、$dt=(2x+1)dx$ となるので、これを用いて元の不定積分を書き直すと

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}dx=\int \frac{d(x^2+x)}{x^2+x}=\int \frac{dt}{t}$$

となる。右辺をよくみてください。これは定理2の形でダミー変数 t が用いられている。よって

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}dx=\int \frac{dt}{t}=\log|t|+c=\log|x^2+x|+c$$

となる。

この例題に用いたテクニックを一般化すると次の公式を得る。

$$\int \frac{kg'(x)}{g(x)}dx=k\log|g(x)|+c$$

この公式を用いると

$$\int \tan xdx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx=-\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\log|\cos x|+c$$

となる。

例：$\int x^2\sqrt{x+1}dx$ を求めてみよう

解：$t=x+1$ とおくと、$dt=dx$。また $tx=t-1$ より、

$$\int x^2\sqrt{x+1}dx=\int (t-1)^2\sqrt{t}dt=\int (t^2-2t+1)t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\int (t^{\frac{5}{2}}-2t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}})dt=\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+c$$

例：$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$ を求めてみよう。

解：$t=x^2-4$ とおくと、$dt=2xdx$ となるので

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + c$$
$$= t^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{x^2-4} + c$$

5.3 部分積分法 (integration by parts)

置換積分法を用いて、かなりの積分が求められるようになった。しかし、$\int \log x dx$ のような単純に思えるものも、

置換積分法では手に負えないのです。実際、$t = \log x$ とおくと $dt = \frac{dx}{x}$。これより、$dx = xdt, x = e^t$ となり、

$$\int \log x dx = \int te^t dt$$

これでは先に進めない。ではどうすればいいか。そこで、置換積分を用いても不定積分が求められないとき、最後の手段として用いるものに、部分積分法 (integration by parts) がある。

定理5 (部分積分法) : $f(x), g(x)$ が連続であるとき、次の式が成り立つ。

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

証明:

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx\} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$
$$= f(x)g'(x)$$

これより、$f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ は $f(x)g'(x)$ の不定積分となる。

上の式で、$u = f(x), v = g(x)$ とおくと、次の式が成り立つ。

$$\int udv = uv - \int vdu$$

例:部分積分法を用いて、$\int \log x dx$ を求めてみよう。

解:

$u = \log x, dv = dx$ とおくと

$$du = \frac{1}{x}dx, v = \int dv = \int dx = x + c$$

よって

$$\int \log x dx = (x+c)\log x - \int (x+c)\frac{1}{x}dx$$
$$= x\log x + c\log x - x - c\log x + c = x\log x - x + c$$

これより、$v = \int dv$ を求めるときは任意の定数 c を無視できる。

例：$\int \sin^{-1} x dx$ を求めてみよう。

解：まず、$t=\sin^{-1} x$ とおくと、$x=\sin t, -\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$ より、$dx=\cos t dt$。よって

$$\int \sin^{-1} x dx = \int t\cos t dt$$

となり、積分公式を用いて積分できない。そこで、部分積分を用いる。

$u=\sin^{-1} x, dv=dx$ とおくと

$$du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, v=\int dv=\int dx = x$$

よって

$$\int \sin^{-1} x dx = x\sin^{-1} x - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

ここで、$t=1-x^2$ とおくと、$dt=-2xdx$。よって

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -t^{\frac{1}{2}}+c=-\sqrt{1-x^2}+c$$

これより、

$$\int \sin^{-1} x dx = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}+c$$

例：$\int xe^{-x}dx$ を求めてみよう

解：

$u=x, dv=e^{-x}dx$ とおくと

$$du=dx, v=\int dv=-e^{-x}$$

よって、

$$\int xe^{-x}dx = x(-e^{-x})-\int(-e^{-x})dx=-xe^{-x}-e^{-x}+c$$