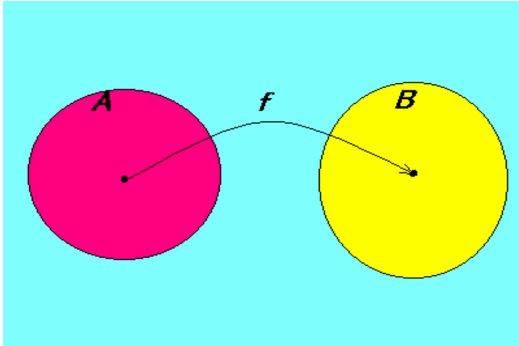
# 関数

## 1．関数

### 1.1　関数とは




関数の本質は対応の規則です。

たとえば

、

$1 \to 1^2, \quad 3 \to 3^2, \quad -5 \to (-5)^2, \quad 0 \to 0^2, \quad \cdots\cdots$

以上の対応関係を　$f(x) = x^2$ とおく。

また、

$$1 \to 2, \quad 2 \to 3, \quad -1 \to 0, \quad 5 \to 6, \quad 1.5 \to 2.5, \quad \cdots\cdots$$

の場合、以上の対応関係を $f(x) = x + 1$

$f$ が集合 $A$ の各元 $x$ に集合 $B$ の元 $f(x)$ を対応させる関数であることを、

$$f : A \to B$$

などと記す。また、$A, \quad B, \{f(x) \mid x \in A\}$ をそれぞれ関数 $f$ の<u>定義域、終域、値域</u>とよぶ。

$f$ は上への関数（全射）$\Leftrightarrow$ 終域＝値域

$f$ は一対一関数（単射）$\Leftrightarrow$ $x \neq x'$ のときつねに $f(x) \neq f(x')$

例えば、$f(x) = x + 1$

定義域：　$R$　　終　域：　$R$　　値　域：　$R$

$f(x) = x + 1$ は全射と単射である。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

定義域：　$\{x \mid x > 0, x \in R\}$　　終　域：　$R$　　値　域：　$\{y \mid y > 0, y \in R\}$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ は単射である。

### 1.2 合成関数と逆関数

<u>合成関数とは</u>

次の関数を考えよう

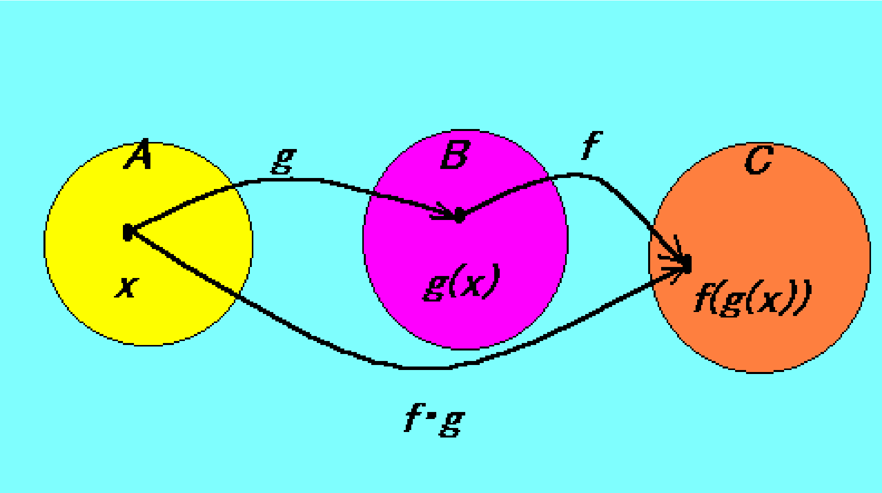
$y = \sqrt{x^2 + 3}$　$x$ にある値を代入して $y$ の値を求めるには、まず、関数により $u$ の値を求め、次に関数

$y = \sqrt{u}$ により $y$ の値を求めるであろう。

一般に、二つの関数

$u = g(x), \qquad y = f(u)$

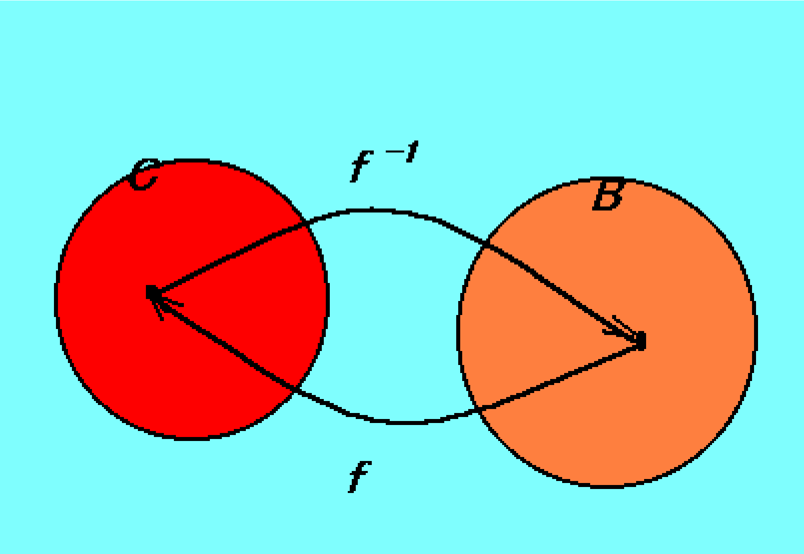
をこの順に引き続いて施す関数 $y = f(g(x))$ を、$g$ と $f$ との合成関数とよび、$f \circ g$ と記す。




逆関数とは

関数 $y = 5x + 4$ で、xの値に対し当然yの値が決まるが、逆にyの1つの値に対してxの値が、1つだけ必ず決まる: $x = (y - 4)/5$

一般に、上への一対一関数 $y = f(x)$ では、yの値に対してxの値が 1 つだけ決まる。yに $y = f(x)$ なるxを対応させる関数fの逆関数とよび $f^{-1}$ と記す。




以上のことをまとめてみると、

$g : A \to B \qquad f : B \to C$

・合成関数 $\quad f \circ g : A \to C \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$

・逆関数 $\quad f^{-1} : C \to B \quad y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(x)$

例: $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1 \quad (2 \le x \le 4), \qquad g(x) = \dfrac{1}{9}x^2 + 2 \quad (0 \le x \le 3)$ のとき

(1) $(f \circ g)(x), \quad (g \circ f)(x)$ を求めよ。

(2) $g^{-1}(x)$ を求めよ。

解:

(1)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{1}{9}x^2+2) = \frac{1}{2}(\frac{1}{9}x^2+2)+1 = \frac{1}{18}x^2+2$$

$(0 \le x \le 3)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\frac{1}{2}x+1) = \frac{1}{9}(\frac{1}{2}x+1)^2+2 = \frac{1}{36}(x+2)^2+2$$

$2 \le x \le 4$

(2)

$y = g^{-1}(x) \qquad (2 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 3)$

とおけば、

$$x = g(x) = \frac{1}{9}y^2+2$$

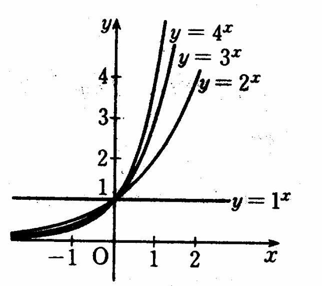
$$\therefore \quad y = 3\sqrt{x-2} \qquad (0 \le y \le 3)$$

$$\therefore \quad g^{-1}(x) = 3\sqrt{x-2} \qquad (2 \le x \le 3)$$

合成関数と逆関数の性質:

$$(f \circ g)\circ h = f \circ (g \circ h), \quad (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

## 1.3 各種の関数



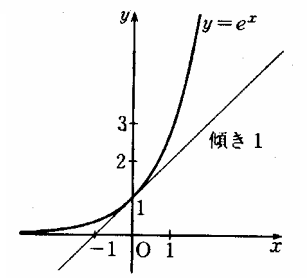

一次関数: $y = ax+b$

指数関数: $y = a^x$

指　数　法　則　:　$a^m a^n = a^{m+n}$　$(a^m)^n = a^{mn}$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

自然指数　$y = e^x$



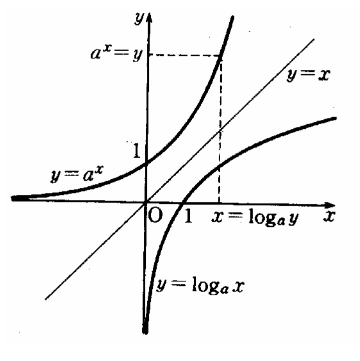

対数関数: $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

常用対数　$y = \log_{10} x \Leftrightarrow x = 10^y$

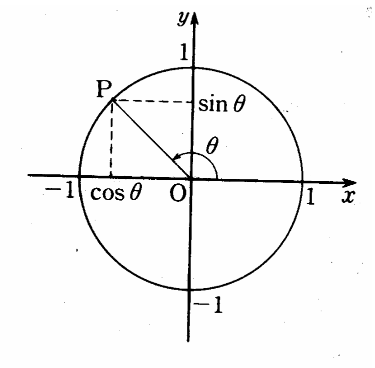
自然対数　$y = \log_e x \Leftrightarrow x = e^y$　　$e = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = 2.7182818\cdots$

対数法則: $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad \log_a x^b = b\log_a x$$




三角関数:




$\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$ の定義：半径1の円で考える。上の図のように単位円がある。円周上の点Pとし、OPとx軸の正の部分とのなす角をθとするとき、

点Pのx座標を $\cos\theta$

点Pのy座標を $\sin\theta$

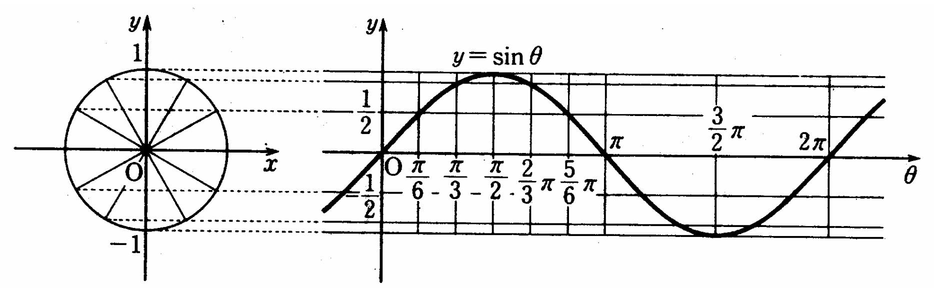
また、 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

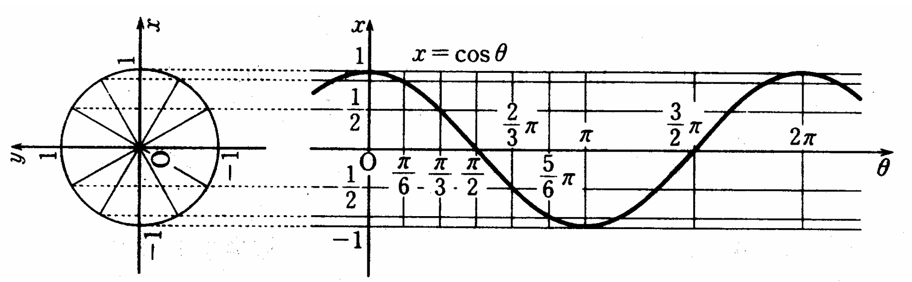
角度の単位： 度・分・秒、 ラジアン

$360 = 2\pi$

$1度 = \dfrac{\pi}{180}ラジアン$

$\sin\theta$、$\cos\theta$ のグラフ




三角関数に関する公式

・相互関係

$$\sin^2\theta + \cos^2 = 1 \qquad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

・周期性

$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta \quad \sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$$

・加法定理

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

・負角の公式

$$\cos(-\theta)=\cos\theta \quad \sin(-\theta)=-\sin\theta$$