導関数とその計算

4.1 微分可能と微分係数

関数が $f(x)$ を x_0 含むある区間で定義されているとき，極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)}{h}=A\ \ (A\neq\pm\infty)$$

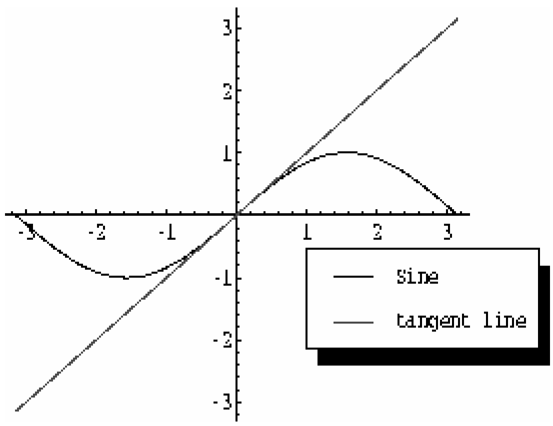
が存在するならば，関数 $f(x)$ は，$x=x_0$ で微分可能(differentiable)　であるという．また，この極限値　A を点 x_0 における微分係数といい，$f'(x_0)$ で表わす．

例：　$f(x)=\sin x$ の微分係数 $f'(0)$ を求めてみよう。

解

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)-\sin(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$$

したがって，$f'(0)=1$ となる．



これをグラフで見てみよう．次の図には $\sin x$ のグラフとその接線 $y=x$ が描かれている．ここで，$\sin x$ の $x=0$ での微分係数と接線 $y=x$ の傾きが同じであることに気付いて下さい．つまり，$f'(0)$ は関数 $f(x)$ の $x=0$ での接線の傾きを表わす．

4.2 導関数

関数 $f(x)$ が，ある区間 I の各点で微分可能のとき $f(x)$ は 区間 I で微分可能(differentiable on I)　であるという．この場合，区間 I の各点にそこでの微分係数を対応させることにより定まる関数を $f(x)$ の 導関数(derivative)　といい，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

で表わす．ほかにも，

$$\frac{df(x)}{dx},\ \ Df(x)$$

などの表わし方もある．また，関数 $f(x)$ の導関数を求めることを微分する(differentiate)　という．

例：$f(x)=2x^3$ を微分してみよう。

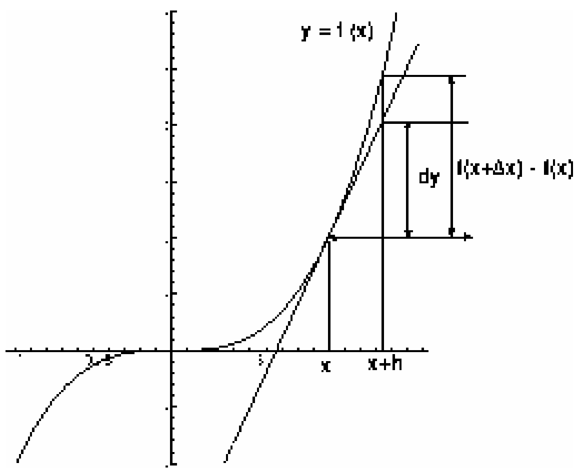
解：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^3-2x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{6x^2h+6xh^2+2h^3}{h}=\lim_{h\to 0}(5x^2+6xh+2h^2)$$

$$=6x^2$$

4.3 微分



変数 x が，ある x から $x+h$ まで変化するときの変動量 h を x の増

分(increment)　といい，　Δx で表わし，これに対応する y の変動量 $f(x+\Delta x)-f(x)$ を y の増分といい，Δy で表わすと，$f'(x)$ は次のように表わすことができる．

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

つまり，

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \circ(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0)$$

ここで $\circ(\Delta x)$ とは

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

ということである．したがって，$f'(x)\Delta x$ が Δy の主要な部分とみなせる．そこで，これを点 x における関数 $y = f(x)$ の 微分(differential)　といい，　dy または $df(x)$ で表わす．つまり

$$dy = df(x) = f'(x)\Delta x$$

特に，　$f(x) = x$ のときは，$f'(x) = 1$ より

$$df(x) = dx = \Delta x$$

つまり，独立変数について増分と微分が一致する．これから

$$dy = f'(x)dx$$

となり，dy, dx にそれぞれ別々に意味を持たせることができた．

例：$y = f(x) = 2x^3$ の微分を求めてみよう。

解：

$$dy = f'(x)dx = 6x^2dx$$

となる。

4.4　主要関数の導関数

$$(a^x)' = a^x \log a \qquad (e^x)' = e^x \qquad (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (\sin x)' = \cos x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

4.5　導関数の計算

定理：(微分公式) $f(x), g(x), h(x)$ が微分可能のとき次式が成り立つ。

(1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

(2) $(cf(x))' = cf'(x)$

(3) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

証明：(3) の証明

$$(f(x)g(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h)+f(x)(g(x+h)-g(x))}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(x+h)+f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
ほかの場合も同様にしてできる。

例：微分公式を使って $\tan x$ の導関数をもとめてみよう。
解：
$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

例：微分公式を使って $y = 3x^3 + 2x + 3$ の導関数を求めてみよう。
解：
$$y' = (3x^3 + 2x + 3)' = (3x^3)' + (2x)' + 3'$$
$$= 3\cdot 3x^2 + 2 = 9x^2 + 2$$

微分公式を学んだだけでも，かなりの関数の導関数を求めることができるようになった．しかし，$y = (x^3+1)^{10}$ のような関数の導関数を求めるとき，積の微分法を用いて，微分していたら大変面倒である．そこで一工夫をしてみましょう．まず、$y = (x^3+1)^{10}$ を分解すると、$y = (x^3+1)^{10}$ は $u = g(x) = x^3 + 1$ と $y = f(u) = u^{10}$ の合成関数でできていることがわかる．そこで y の微分 dy と u の微分 du を求めると，
$$dy = f'(u)du = 10u^9 du,\ du = g'(x)dx = 3x^2 dx$$
となり，これより
$$dy = 10u^9 du = 10(x^3+1)^9\cdot 3x^2 dx$$
となる。これが合成関数の微分法である。

定理：（合成関数の微分法）$y = f(u),\ u = g(x)$ がそれぞれ u, x の関数として微分可能ならば、合成関数 $y = f(g(x))$ も x の関数として微分可能で、
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$
が成り立つ。

証明：$dy = f'(u)du,\ du = g'(x)dx$ より、$dy = f'(u)g'(x)dx$。したがって、
$$\frac{dy}{dx} = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

例：$y = \cos(x^2 + x)$ を微分してみよう。

解：まず、$\cos(x^2+x)$ を分解すると $u=x^2+x$ と $y=\cos u$ となる。よって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=-\sin u(2x+1)=-(2x+1)\sin(x^2+x)$$

となる。

例：n,m 整数とし、$y=x^{\frac{m}{n}}$ を微分してみよう。

解：まず，両辺を n 乗すると

$$y^n=x^m$$

次に，両辺を x について微分すると，左辺は

$$\frac{d(y^n)}{dx}=\frac{d(y^n)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=ny^{n-1}y'$$

となり，また，右辺は

$$\frac{d(x^m)}{dx}=mx^{m-1}$$

となります．よって，

$$ny^{n-1}y'=mx^{m-1}$$

これより

$$y'=\frac{m}{n}\cdot\frac{x^{m-1}}{y^{n-1}}=\frac{m}{n}\cdot\frac{x^{m-1}}{y^n}\cdot y=\frac{m}{n}\cdot\frac{x^m}{x^m}\cdot\frac{x^{\frac{m}{n}}}{x}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

となる．

定理：（逆関数の微分法）$y=f(x)$ とその逆関数 $y=f^{-1}(x)$ が微分可能ならば、

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\quad \text{または}\quad \frac{dy}{dx}=1\Big/\frac{dx}{dy}$$

例：$y=\log x$ を微分してみよう。

解：

$y=\log x$ の逆関数が $x=e^y$ である。また $(e^x)'=e^x$。だから逆関数の微分法によって、

$$\frac{dy}{dx}=1\Big/\frac{dx}{dy}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}$$