解析学:平均値の定理, テーラーの定理と近似値

DRR (IPU)

07/07/2011

1 平均値の定理

1.1 ロール (Rolle) の定理

「閉区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数 $f(x)$ が次の１） ３）の条件を満たすとする。

1. $f(x)$ は $[a, b]$ 上連続
2. $f(x)$ は $]a, b[$ 上微分可能
3. $f(a) = f(b)$

このとき $f'(c)$ かつ $a < c < b$ となる点 c が存在する。

1.2 平均値の定理

「閉区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数 $f(x)$ が次の１）、２）の条件を満たすとする。

1. $f(x)$ は $[a, b]$ 上連続
2. $f(x)$ は $]a, b[$ 上微分可能

このとき $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ かつ $a < c < b$ となる点 c が存在する。
平均変化率 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ は $y = f(x)$ のグラフの両端 $P(a, f(a))$ と $P(b, f(b))$ を結ぶ線分 PQ の傾きを表す。

2　テーラーの公式

平均値の定理より区間 I 上定義された関数 $f(x)$ が微分可能で $a, a+h \in I$ であれば $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)(0 < \theta < 1)$ と表せる。また $\epsilon(h) = f(a+h) - f(a) - hf'(a)$ とおくと、$x = a$ で微分可能性より $\epsilon(h) = o(h)(h \to 0)$ となる。ゆえに、

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)(h \to 0)$$

$$= (h \text{ の } 1 \text{ 次式}) + o(h)(h \to 0).$$

そこで $f(x)$ が I で n 回微分可能ならば

$$f(a+h) = (h \text{ の } n \text{ 次式}) + o(h^n)(h \to 0).$$

が成り立つであろう予想される。まず特別な場合として $f(x)$ が多項式のときを考えてみよう。$f(a+h)$ も h の多項式で

$$f(a+h) = \Sigma_{k=0}^{n} a_k h^k + \Sigma_{k>n} a_k h^k$$

両辺を h で微分すると、係数 a_k を求められる。

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

したがって

$$f(a+h) = \Sigma_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^k)(h \to 0)$$

が多項式 $f(x)$ の場合には成立する。

テーラーの定理：
関数 $f(x)$ が開区間 I 上で n 回微分可能とすると、$a, a+h \in I$ に対し

$$f(a+h) = \Sigma_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!} h^n (0 < \theta < 1)$$

と表すことができる。
$a+h=x$ とおいてを書き直すと

$$f(x) = \Sigma_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!} (x-a)^n (0 < \theta < 1)$$

剰余項 R_n をラグランジュ(Lagrange) 型と呼ぶ。
特に $a=0$ とおいて場合、それを**マクローリンの公式**と呼ぶことがある。

$$f(x) = \Sigma_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x)^k + R_n (x \in I)$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta(x))}{n!} (x)^n (0 < \theta < 1)$$

3 近似値

テーラーの公式を用いて近似値を計算することができる。$f(x)$ を開区間 I 上定義された n 回微分可能な関数とする。$a, a+h \in I$ として

$$f(x) = \Sigma_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!} (x-a)^n (0 < \theta < 1)$$

であるからの右辺の h の $(n-1)$ 次式を $f(x)$ の a の近で近似式としてとる R_n が誤差 E を与える。もし I で $|f^{(n)}(x)| \leq M$ が成り立てば

$$|E| \leq \frac{h^n \bullet M}{n!}$$

となる。

4　例題

問）$65 = 8^2 + 1$ であることを利用して $\sqrt{65}$ の近似値を少数第 3 位まで求めよ。

解）

$\sqrt{65} = \sqrt{64+1} = \sqrt{8^2+1}$

$\sqrt{65} = \sqrt{64(1+\frac{1}{64})} = \sqrt{64}\sqrt{1+\frac{1}{64}} = 8 * \sqrt{1+\frac{1}{64}}$

$x = \frac{1}{64}$ 十分小さい値を指定する

$f(x) = \sqrt{1+x}$ テーラー展開

$$f(x) = \Sigma_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n (0 < \theta < 1)$$

近似値を少数第 3 位までしたら、以下のテーラー展開 3 次式まで行う。実際、マクローリンの公式を用いて近似値を求める。

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + f''(0)\frac{(x)^2}{2!} + R_3$$

$$|E| \leq \frac{h^3 \bullet M}{3!} = 0.0001 and |f^{(3)}(x)| \leq M$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{(1+x)^3}}, f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{6\sqrt{(1+x)^5}}, f'''(0) = \frac{1}{6}$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{-1}{4}\frac{x^2}{2!} + R_3$$

$$f(\frac{1}{64}) = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{64} + \frac{-1}{4}\frac{(\frac{1}{64})^2}{2!} + R_3$$

$$f(\frac{1}{64}) = 1 + \frac{1}{128} + \frac{-1}{4*64^2*2} + R_3$$

$$\sqrt{65} \cong 8 * (1 + \frac{1}{128} + \frac{-1}{32768})$$

$$\sqrt{65} \cong 8 + 8 * \frac{1}{128} + 8 * \frac{-1}{32768}$$

$$\sqrt{65} \cong 8 + \frac{1}{16} - \frac{1}{4096}$$

$$\sqrt{65} \cong 8 + 0.0625 - 0.000246 = 8.062475$$

$\sqrt{65} = 8.0622577$ 電卓の結果