

平成 23 年度前期 解析学 期末試験問題

DAVID

2011/8/8

本試験問題は、「関数，極限值，微分に関する問題(50 点)」と「積分に関する問題(50 点)」から構成されている。「関数，極限值，微分に関する問題」に関し 6 割以上(30 点以上)得点し，かつ，「積分に関する問題」でも 6 割以上(30 点以上)得点することが，シラバスに記載された単位認定の要件である。

[関数，極限值，微分に関する問題]

以下の問題 A1～問題 A5 を解答しなさい。但し，途中経過などを示し丁寧に解答すること。

問題 A1 (10 点)

次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3}{x-4} \text{ と } \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3}{x-4}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 12x^2 + x - 7)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(10x)}{x}$$

問題 A2 (10 点)

次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+5}{x^2-7x+3}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x - 4}{x^2 - 3x + 3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \sin^2 x}{1 - \cos x}$$

問題 A3 (10 点)

関数 $y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ の定義域、値域、臨界点、漸近線を求めよ。自然指数

関数を用いてこの関数を記述せよ。この関数のグラフを描けよ。この関数の逆関数を求めよ。

問題 A4 (10 点)

(1) $f(x) = 4x^2 - x$ の時、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ を求めよ。

(2) 次の関数の不連続点を求めよ。削除できる不連続点を示せ。

$$y = \frac{3x+3}{x^3 - 3x - 4}$$

次の関数を微分せよ。

(1) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 2}$

(2) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

問題 A5 (10 点)

(1) 合成関数の微分法を示せ。

(2) 関数 $f(x) = x - e^x \cos(x)$ について以下の問に答えよ

1. $f'(0), f''(0), f'''(0)$

2. $x = 0$ における 3 次近似式

3. $f(x)$ は $x = 0$ で極値をとるか

(3) 以下は, $\sin x, \cos x, e^x$ を $x = 0$ まわりで Taylor 展開したものである。

$$\sin x =$$

$$\cos x =$$

$$e^x =$$

[積分に関する問題]

以下の問題 B1～問題 B9 の中から 5 問(50 点分) を選び, 解答しなさい。但し, どの問題を選んだかを明示するとともに, 6 問以上解答しないよう注意すること。また, 特に指示がない場合においても, 途中経過などを示し丁寧に解答すること。

問題 B1 (10 点)

次の関数を積分せよ。

(1) x^4

(2) $\frac{3}{x}$

(3) $4e^{4x}$

- (4) $7 \sin x$
- (5) $\cos(3x)$

問題 B2 (10 点)

次の不定積分を求めよ。

- (1) $\int dx$
- (2) $\int (5 \sin x + 6 \cos x) dx$
- (3) $\int (5x + 1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}) dx$

問題 B3 (10 点)

次の関数を積分せよ。

- (1) $(x+3)^5$
- (2) $(5x+1)^3$
- (3) $x(x^3+1)^2$
- (4) $x\sqrt{x^2+1}$
- (5) $\sin^5 x \cos x$

問題 B4 (10 点)

部分積分を用いて、次の関数を積分せよ。

- (1) xe^x
- (2) $x \sin x$

問題 B5 (10 点)

次の定積分を求めよ。ただし、計算の過程を明示すること。

- (1) $\int_1^2 \log x dx$
- (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2a}} \sin ax dx \quad (a \neq 0)$
- (3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$

問題 B6 (10 点)

置換積分により、次の定積分を求めよ。ただし、計算の過程を明示すること。

$$(1) \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{(x^2-1)^2+1} dx$$

$$(2) \int_0^1 \frac{1}{(e^x + e^{-x})^2} dx$$

$$(3) \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$$

問題 B7 (10 点)

部分積分により、次の定積分を求めよ。ただし、計算の過程を明示すること。

$$(1) \int_1^2 x^a \log x dx \quad (a \neq -1)$$

$$(2) \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

$$(3) \int_1^2 x(\log x)^2 dx$$

問題 B8 (10 点)

(1) 放物線 $4y = x^2$ と直線 $y = \frac{1}{2}x$ とで囲まれる部分の面積 S を求めよ。その部分の面積を図せよ。

(3) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y^2 = x$ とで囲まれる部分の面積 S を求めよ。その部分の面積を図せよ。