平成 25 年度前期　解析学　期末試験問題―解

DAVID

2013/7/29

本試験問題は，「関数，極限値，微分に関する問題(50 点)」と「積分に関する問題(50 点)」から構成されている．「関数，極限値，微分に関する問題」に関し 6 割以上(30 点以上)得点し，かつ，「積分に関する問題」でも 6 割以上(30 点以上)得点することが，シラバスに記載された単位認定の要件である．

[関数，極限値，微分に関する問題]

以下の問題 A1～問題 A5 を解答しなさい。但し，途中経過などを示し丁寧に解答すること。

問題 A1 (10 点)

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 4^-}\dfrac{3}{x-4}=-\infty$ と $\lim_{x\to 4^+}\dfrac{3}{x-4}=+\infty$

(2) $\lim_{x\to -\infty}(2x^3-12x^2+x-7)=-\infty$

(3) $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\dfrac{1}{2}$

(4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(10x)}{x}=10$

問題 A2 (10 点)

次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to \infty}\dfrac{2x+5}{x^2-7x+3}=0$

(2) $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}=\dfrac{1}{4}$

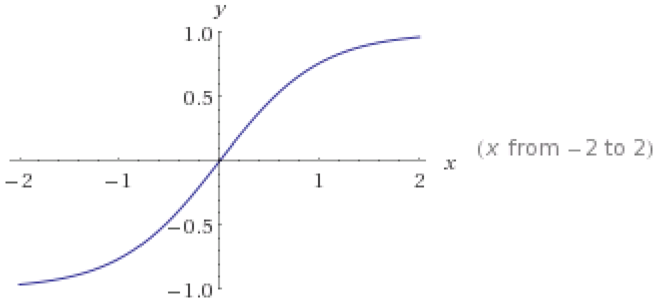
(3) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+2x-4}{x^2-3x+3}=-12$

(4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{7\sin^2 x}{1-\cos x}=14$

問題 A3 (10 点)

関数 $y=\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ の定義域、値域、臨界点、漸近線を求めよ。自然指数関数を用いてこの関数を記述せよ。この関数のグラフを描けよ。この関数の逆関数を求めよ。

定義域 ： ℝ, 値域 ： $x\in(-1,1)$, 臨界点 :なし, 漸近線 ： $y=-1,\ y=1$



自然指数関数を用いてこの関数を記述:

$$y=\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}}{\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

逆関数 ： $y^{-1}=\tanh^{-1}x=\dfrac{1}{2}\log(\dfrac{x+1}{1-x})$

問題 A4 (10 点)

(1) $f(x)=4x^2-x$ の時、$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を求めよ。

$f'(x)=8x-1$

(2) 次の関数の不連続点を求めよ。削除できる不連続点を示せ。

$$y=\frac{3x+3}{x^3+3x-4}$$

$x^3+3x-4=0$の時、y=infinite：discontinuity

$x=-1$不連続点

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+2} \Rightarrow y'=\dfrac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$

(2) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \Rightarrow y'=\dfrac{1}{(x-1)^2\sqrt{\dfrac{1+x}{x-1}}}$

問題 A5 (10 点)

(1) 合成関数の微分法を示せ。

$f(g(x))=f'(g(x))g'(x)$

(2) 関数 $f(x)=x-e^x\cos(x)$ について以下の問に答えよ

1． $f'(0), f''(0), f'''(0)$

$f'(0)=1+e^0\sin(0)-e^0\cos(0)=0, f''(0)=2e^0\sin(0)=0, f'''(0)=2e^0(\sin(0)+\cos(0))=2$

2． $x=0$における 3 次近似式

$f(x)=-1+\dfrac{x^3}{3}$

3． $f(x)$は$x=0$で極値をとるか

とらない

(3) 以下は， $\sin x, \cos x, e^x$ を $x=0$ まわりで Taylor 展開したものである。

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{O}(x^7)$$

$$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \mathrm{O}(x^7)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \mathrm{O}(x^7)$$

[積分に関する問題]

以下の問題 B1～問題 B9 の中から5問(50点分)を選び，解答しなさい。但し，どの問題を選んだかを明示するとともに，6問以上解答しないよう注意すること。また，特に指示がない場合においても，途中経過などを示し丁寧に解答すること。

問題 B1 (10 点)

次の関数を積分せよ。

(1) x^4, $\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C$

(2) $\frac{3}{x}$, $\int \frac{3}{x} dx = 3Ln(x) + C$

(3) $4e^{4x}$, $\int 4e^{4x} dx = e^{4x} + C$

(4) $7\sin x$, $\int (7\sin x) dx = -7\cos(x) + C$

(5) $\cos(3x)$, $\int \cos(3x) dx = \frac{1}{3}\sin(3x) + C$

問題 B2 (10 点)

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int dx = x + C$

(2) $\int (5\sin x + 6\cos x) dx = -5\cos(x) + 6\sin(x) + C$

(3) $\int(5x+1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3})dx=\frac{5}{2}x^2+x+3Ln(x)-\frac{2}{x}-\frac{3}{2x^2}+C$

問題 B3 (10 点)

次の関数を積分せよ。

(1) $(x+3)^5$, $\int(x+3)^5dx=\frac{1}{6}(x+3)^6+C$

(2) $(5x+1)^3$, $\int(5x+3)^3dx=\frac{5}{4}(x+3)^4+C$

(3) $x(x^3+1)^2$, $\int x(x^3+1)^2dx=\int x(x^6+2x^3+1)dx=\frac{1}{8}x^8+\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{2}x^2+C$

(4) $x\sqrt{x^2+1}$, $\int x\sqrt{x^2+1}dx=\int x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C$

(5) $\sin^5 x\cos x$, $\int\sin^5 x\cos xdx=\frac{1}{6}\sin^6(x)+C$

問題 B4 (10 点)

部分積分を用いて，次の関数を積分せよ。

(1) xe^x, $\int xe^xdx=xe^x-\int 1*e^xdx=(x-1)e^x+C$

(2) $x\sin x$, $\int x\sin xdx=x(-\cos x)-\int 1*(-\cos x)dx=-x\cos x+\sin x+C$

問題 B5 (10 点)

次の定積分を求めよ。ただし，計算の過程を明示すること。

(1) $\int_1^2\log xdx=2\log 2$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2a}}\sin axdx \quad (a\neq 0)=\frac{1}{a}$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx=\frac{\log 2}{2}$

問題 B6 (10 点)

置換積分により，次の定積分を求めよ。ただし，計算の過程を明示すること。

(1) $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{(x^2-1)^2+1} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{u^2+1} du = \frac{\pi}{2}$

(2)

$$\int_0^1 \frac{1}{(e^x+e^{-x})^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{(e^{2x}+2+e^{-2x})} dx = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{((e^{2x})^2+2e^{2x}+1)} dx = \left[\frac{1}{2(e^{2x}+1)}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(1+\mathrm{e}^2)}$$

(3) $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx = \left[2\sqrt{x+1} + \log(1-\sqrt{x+1}) - \log(1+\sqrt{x+1})\right]_0^1 = 2 + \log(\frac{3}{2})$

問題 B7 (10 点)

部分積分により，次の定積分を求めよ。ただし，計算の過程を明示すること。

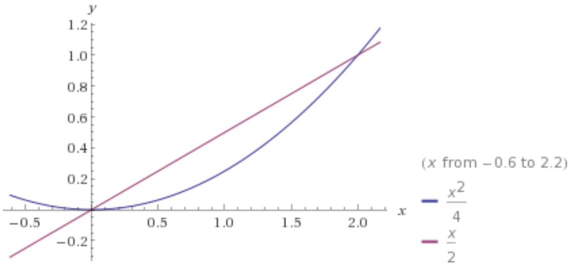
(1) $\int_1^2 x^a \log x dx \quad (a \neq -1) = \frac{2^{a+1}(a\log(2)-1+\log(2))+1}{(a+1)^2}$

(2) $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = 2 - \frac{5}{\mathrm{e}}$

(3) $\int_1^2 x(\log x)^2 dx = \frac{3}{4} + 2\log^2(2) - 2\log(2)$

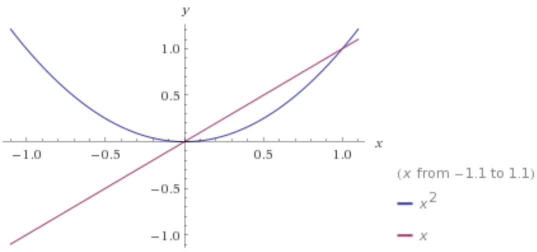
問題 B8 (10 点)

(1) 放物線 $4y = x^2$ と直線 $y = \frac{1}{2}x$ とで囲まれる部分の面積 S を求めよ。その部分の面積を図せよ。



$$S = \int_0^2 (\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}) dx = \frac{1}{3}$$

(2) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ とで囲まれる部分の面積 S を求めよ。その部分の面積を図せよ。



$$S = \int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{6}$$