第12回　解析学　旧情報学基礎C　確認シート（解）

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　　名前:David

※ 自分で答えること。人のシートを見てはいけません。
※ 講義資料は見てもよいです。

1．次の二重積分 I を求めよ。

⑴ $\iint_D 2x^2 y\,dxdy$　　　$D: x \le y \le 2x,\quad 0 \le x \le 1$

$$\iint_D 2x^2 y\,dxdy = \int_0^1 \int_x^{2x} 2x^2 y\,dxdy = \int_0^1 2x^2 \left(\int_x^{2x} y\,dy\right)dx = \int_0^1 2x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{2x} dx$$

$$= \int_0^1 2x^2 \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right]dx = \int_0^1 2x^2 \left[\frac{3x^2}{2}\right]dx = 3\int_0^1 x^4 dx = 3\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{5}$$

⑵ $\iint_D (x+y-1)dxdy$　　　$D: x \ge 0, y \ge 0,\quad x+y \le 1$

$$\iint_D (x+y-1)dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y-1)dxdy \qquad D: x \ge 0, y \ge 0,\quad x+y \le 1 \Leftrightarrow y \le 1-x$$

$D: x \ge 0, y \ge 0,\quad x+y \le 1 \Leftrightarrow y \le 1-x, x$の最大値は1である。$x \in [0,1], y \in [0, 1-x]$

$$\iint_D (x+y-1)dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y-1)dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (x+y-1)dy\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[(x-1)\int_0^{1-x} dy + \int_0^{1-x} y\,dy\right]dx = \int_0^1 \left[(x-1)[y]_0^{1-x} + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x}\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[(x-1)[(1-x)-0] + \left[\frac{(1-x)^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right]\right]dx = \int_0^1 \left[-(x-1)^2 + \frac{(x-1)^2}{2}\right]dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)^2 dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\left[\frac{(1-1)^3}{3} - \frac{(0-1)^3}{3}\right] = -\frac{1}{6}$$

2．つぎの各曲面と(X,Y)平面によって囲まれる立体の体積Vを二重積分を使って計算せよ$(a>0)$

(1)　$z=xy(a-x-y)$　　　　　$x,y,z\ge 0$

$$V=\iint_D z\,dxdy \quad D: x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0 \Leftrightarrow xy(a-x-y)\ge 0 \Leftrightarrow (a-x-y)\ge 0 \Leftrightarrow x+y\le a$$

$$V=\iint_D z\,dxdy \quad D: x\ge 0, y\ge 0, x+y\le a,\ \ x\in[0,a-y],\ \ y\in[0,a]$$

$$V=\iint_D xy(a-x-y)\,dxdy=\int_0^a\int_0^{a-y} xy(a-x-y)dxdy=\int_0^a y\left(\int_0^{a-y} x(a-x-y)dx\right)\,dy$$

$$V=\int_0^a y\left(\int_0^{a-y} x(a-y)dx-\int_0^{a-y} x^2dx\right)\,dy=\int_0^a y\left((a-y)\int_0^{a-y} xdx-\int_0^{a-y} x^2dx\right)\,dy$$

$$V=\int_0^a y\left((a-y)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{a-y}-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{a-y}\right)\,dy=\int_0^a y\left((a-y)\left[\frac{(a-y)^2}{2}\right]-\left[\frac{(a-y)^3}{3}\right]\right)\,dy$$

$$V=\int_0^a y\left(\left[\frac{(a-y)^3}{2}\right]-\left[\frac{(a-y)^3}{3}\right]\right)\,dy=\int_0^a y\frac{(a-y)^3}{6}dy$$ 部分積分法を用いて積分する

$$V=\frac{1}{6}\int_0^a y(a-y)^3\,dy=\frac{1}{6}\left[\frac{y^2}{2}(a-y)^3\right]_0^a-\frac{1}{6}\int_0^a\frac{y^2}{2}(-3)(a-y)^2\,dy=0+\frac{1}{4}\int_0^a y^2(a-y)^2\,dy$$

部分積分法を用いて積分する

$$V=\frac{1}{4}\int_0^a y^2(a-y)^2\,dy=\frac{1}{4}\left[\frac{y^3}{3}(a-y)^2\right]_0^a-\frac{1}{4}\int_0^a\frac{y^3}{3}(-2)(a-y)\,dy=0+\frac{1}{6}\int_0^a y^3(a-y)\,dy$$

$$V=\frac{1}{6}\int_0^a y^3(a-y)\,dy=\frac{1}{6}\left[a\frac{y^4}{4}-\frac{y^5}{5}\right]_0^a=\underline{\frac{1}{6}\left[a\frac{a^4}{4}-\frac{a^5}{5}\right]=\frac{a^5}{120}}$$

(2)　$z=x^2(a-x)-y^2$　　　　　$x,z\ge 0$

$$V=\iint_D z\,dxdy \quad D: x\ge 0, z\ge 0 \Leftrightarrow x^2(a-x)-y^2\ge 0 \Leftrightarrow -x\sqrt{a-x}\le y\le x\sqrt{a-x}$$

$$V=\iint_D z\,dxdy \quad x\in[0,a],\ \ y\in\left[-x\sqrt{a-x},x\sqrt{a-x}\right]$$

$$V=\iint_D[x^2(a-x)-y^2]dydx=\int_0^a\int_{-x\sqrt{a-x}}^{x\sqrt{a-x}}[x^2(a-x)-y^2]dy\,dx=2\int_0^a\int_0^{x\sqrt{a-x}}[x^2(a-x)-y^2]dy\,dx$$

週関数ですから、f(−y)=f(y)

$$\int_0^{x\sqrt{a-x}}[x^2(a-x)-y^2]dy=\left[x^2(a-x)y-y^3\right]_0^{x\sqrt{a-x}}=\frac{2}{3}x^3(a-x)^{\frac{3}{2}}$$

部分積分法を用いて積分する

$$V=2\int_0^a\int_0^{x\sqrt{a-x}}[x^2(a-x)-y^2]dy\,dx=2\int_0^a\frac{2}{3}x^3(a-x)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{4}{3}\int_0^a x^3(a-x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$at=x,\ adt=dx, x=a\Leftrightarrow t=1,\ V=\frac{4}{3}a^{\frac{11}{2}}\int_0^1 t^3(1-t)^{\frac{3}{2}}dt$$

計算を省略

$$V=\frac{4}{3}a^{\frac{11}{2}}\int_0^1 t^3(1-t)^{\frac{3}{2}}dt=\frac{16}{105}a^{\frac{11}{2}}\int_0^1(1-t)^{\frac{9}{2}}dt=\frac{128}{3465}a^{\frac{11}{2}}$$