

平成 21 年度前期 解析学 期末試験問題 (解)

D.RAMAMONJISOA

2009/8/6

本試験問題は、「関数、極限值、連続に関する問題(50 点)」と「微分と積分に関する問題(50 点)」から構成されている。「関数、極限值、連続に関する問題」に関し 6 割以上(30 点以上)得点し、かつ、「微分と積分に関する問題」でも 6 割以上(30 点以上)得点することが、シラバスに記載された単位認定の要件である。

[関数、極限值、微分に関する問題]

以下の問題 A1～問題 A6 の中から 5 問(50 点分) を選び、解答しなさい。但し、どの問題を選んだかを明示するとともに、5 問以上解答しないよう注意すること。また、特に指示がない場合においても、途中経過などを示し丁寧に解答すること。

問題 A1 (10 点)

次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 1) = 4 - 8 + 1 = -3$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{25 - x^2} = 3$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5} = -10$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - x - 12} = \frac{1}{7}$$

問題 A2 (10 点)

次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 5}{x^2 + 5} = \infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 3x^2 + 5) = \infty$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 7x^4 - 2x + 5) = -\infty$$

$$(4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)} = \frac{1}{3}$$

問題 A3 (10 点)

関数 $y = \text{Log}(2x+1)$ の逆関数を求めよ。 $\text{Log}(x)$ は自然対数関数である。

$$e^y = 2x+1, \Rightarrow x = \frac{1}{2}(e^y - 1), f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^x - 1)$$

問題 A4 (10 点)

関数 $f(x) = \sqrt{5x+1}$ において、次の極限值を求めよ

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5(x+h)+1} - \sqrt{5x+1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5(x+h)+1} - \sqrt{5x+1}}{h} \frac{\sqrt{5(x+h)+1} + \sqrt{5x+1}}{\sqrt{5(x+h)+1} + \sqrt{5x+1}} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x+h)+1 - (5x+1)}{h} \frac{1}{\sqrt{5(x+h)+1} + \sqrt{5x+1}} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h}{h} \frac{1}{\sqrt{5(x+h)+1} + \sqrt{5x+1}} = \frac{5}{2\sqrt{5x+1}} \end{aligned}$$

問題 A5 (10 点)

次の関数の不連続を求めよ。関数が不連続である点において、その点で連続であるように関数を定義し直すことが可能か不可能を決定せよ。(除去可能不連続点か除去不可能不連続点であるか示せ)。

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x+2}, \quad \text{不連続点 } x = -2 \text{ 除去可能}$$

$$(2) f(x) = x^3 - 7x \quad \text{不連続点なし}$$

$$(3) f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} \quad \text{不連続点 } x = 1 \text{ or } -1 \text{ 除去可能}$$

$$(4) f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} \quad \text{不連続点 } x = -2 \text{ or } 2 \quad x = 2 \text{ 除去可能, } x = -2 \text{ 除去不可能}$$

問題 A6 (10 点)

次の不定形の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan(x))'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 \quad \text{ロピタル法}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} |\text{Log}(x)|^x$, $\lim_{x \rightarrow 0} \text{Log}(y) = \lim_{x \rightarrow 0} \text{Log}(|\text{Log}(x)|^x)$ を用いて極限值を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{Log}(y) = \lim_{x \rightarrow 0} \text{Log}(|\text{Log}(x)|^x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \text{Log}(|\text{Log}(x)|) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(|\text{Log}(x)|)}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

ロピタルルール

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(|\text{Log}(x)|)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\text{Log}(|\text{Log}(x)|))'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x \text{Log}(x)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x}{\text{Log}(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{Log}(y) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1$$

[微分と積分に関する問題]

以下の問題 B1～問題 B9 の中から 5 問(50 点分)を選び、解答しなさい。但し、どの問題を選んだかを明示するとともに、5 問以上解答しないよう注意すること。また、特に指示がない場合においても、途中経過などを示し丁寧に解答すること。

問題 B1 (10 点)

次の関数を微分せよ。

$$(1) x^7 \quad (x^7)' = 7x^6$$

$$(2) \frac{5}{x} \quad \left(\frac{5}{x}\right)' = -\frac{5}{x^2}$$

$$(3) 4e^x \quad (4e^x)' = 4e^x$$

$$(4) 7 \sin x \quad (7 \sin x)' = 7 \cos x$$

$$(5) 7 \cos x \quad (7 \cos x)' = -7 \sin x$$

問題 B2 (10 点)

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int dx = x + C$$

$$(2) \int (4 \sin x + 6 \cos x) dx = -4 \cos x + 6 \sin x + C$$

$$(3) \int (2x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}) dx = x^2 + x - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{4x^4} + C$$

問題 B3 (10 点)

次の関数を微分せよ。

$$(1) (x+3)^6 \quad ((x+3)^6)' = 6(x+3)^5$$

$$(2) (3x+1)^4 \quad ((3x+1)^4)' = 4(3x+1)^3(3) = 12(3x+1)^3$$

$$(3) x(x^2+1)^2 \quad (x(x^2+1)^2)' = (x^2+1)^2 + x \cdot 2(x^2+1)(2x) = (5x^2+1)(x^2+1)$$

$$(4) x\sqrt{x^2+1} \quad (x\sqrt{x^2+1})' = \sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$(5) \sin^4 x \cos x$$

$$(\sin^4 x \cos x)' = (\sin^4 x)' \cos x + \sin^4 x (\cos x)' = 4 \sin^3 x (\cos^2 x) - \sin^5 x$$

問題 B4 (10 点)

部分積分を用いて、次の関数を積分せよ。

$$(1) xe^x \quad \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

$$(2) x \sin x \quad \int x \sin x dx = -x \cos x - \int 1(-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C$$

問題 B5 (10 点)

次の定積分を求めよ。ただし、計算の過程を明示すること。

$$(1) \int_1^2 \log x dx = -1 + \log(4)$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2a}} \sin ax dx \quad (a \neq 0) = \frac{1}{a}$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\log(2)}{2}$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin x dx = \frac{1}{5}$$

$$(5) \int_0^a \frac{1}{x^2+a^2} dx \quad (a \neq 0) = \frac{\pi}{4a}$$

問題 B6 (10 点)

置換積分により、次の定積分を求めよ。ただし、計算の過程を明示すること。

$$(1) \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{(x^2-1)^2+1} dx = 0.785398$$

$$\bullet (2) \int_0^1 \frac{1}{(e^x + e^{-x})^2} dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(e^x + e^{-x})^2} dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(1+e^2)} \approx 0.190399\dots$$

$$(3) \int_3^8 \frac{\sqrt[8]{x+1}}{x} dx$$

$$\int_3^8 \frac{\sqrt[8]{x+1}}{x} dx = 2 + \log\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2.40547\dots$$

問題 B7 (10 点)

部分積分により、次の定積分を求めよ。ただし、計算の過程を明示すること。

$$(1) \int_1^2 x^a \log x dx \quad (a \neq -1)$$

$$\int_1^2 x^a \log(x) dx = \frac{2^{a+1} (a \log(2) - 1 + \log(2)) + 1}{(a+1)^2}$$

$$\bullet (2) \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = 2 - \frac{5}{e} \approx 0.160603\dots$$

$$\bullet (3) \int_1^2 x(\log x)^2 dx$$

$$\int_1^2 x \log^2(x) dx = \frac{3}{4} + 2 \log^2(2) - \log(4) \approx 0.324612\dots$$

問題 B8 (10 点)

次の数の近以値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{7.9} = \underline{1.992}$

(2) $\sqrt{100.5} = \underline{10.025}$

(3) $\cos 29^\circ = \underline{0.875}$

問題 B9 (10 点)

次式 $x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$ において、 y' を求めよ。

$$x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$$

$$(x^2y)' - (xy^2)' + (x^2)' + (y^2)' = 0$$

$$2xy + y' - y^2 - x2yy' + 2x + 2yy' = 0$$

$$(x^2 - x2y + 2y)y' + 2xy - y^2 + 2x = 0$$

$$y' = -\frac{2xy - y^2 + 2x}{x^2 - x2y + 2y}$$