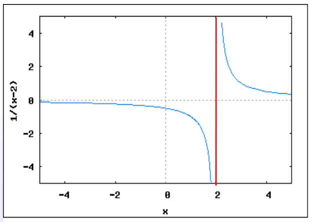
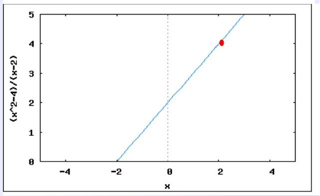
連続関数

関数f(x)はx＝2の時、不連続である。f(2)は定義できないし、lim f(x) は存在しない(無限大)。
x->2



関数f(x)はx＝2の時、不連続である。f(2)は定義できない。



連続関数

関数 $f(x)$ が x_0において,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

即ち,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

を満たすとき, $f(x)$ は x_0 において連続であるという

また, x_0において連続なとき, x_0を連続点といい, 連続点でない点を不連続点という

さらに, 関数 $f(x)$ が, ある区間 I の各点で連続なとき, $f(x)$ は区間 Iで連続という

連続関数と不連続な関数の例

多項式 $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ （$a_0, a_1, \cdots, a_n$ は定数）や, 三角関数 $y = \sin x, y = \cos x$ は $(-\infty, \infty)$ で連続

$y = \tan x$ は $(-\infty, \infty)$ から $x = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$を除いた全ての点で連続

ようするに, グラフが繋がっているところは連続で, 切れているところが不連続

Dirichlet関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1], x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \in [0,1], x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$$

は $[0,1]$ においていたるところ不連続

連続関数の性質

定理1 :
$f(x), g(x)$ が x_0で連続なとき,

$cf(x)$（ c は定数）　$f(x) + g(x)$

$f(x)g(x)$　$\dfrac{f(x)}{g(x)}$　$(g(x_0) \neq 0)$

は, x_0 で連続である

これは便利!!
ようするに, 2つの連続関数を足したり, 掛けたりしたものは, また連続になるということ

単調増加と単調減少

関数 $f(x)$ が,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \ \ [f(x_1) \geq f(x_2)]$$

を満たすとき, 単調増加[単調減少]であるという

等号なし

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \ \ [f(x_1) > f(x_2)]$$

を満たすとき, 狭義単調増加[狭義単調減少]であるという

単調増加関数と単調減少関数[狭義単調増加関数と狭義単調減少関数]を総称して, 単調関数[狭義単調関数]という

e.g.

$y = a^x$ $(a > 1)$, $(-\infty, \infty)$ は連続で狭義単調増加

$y = a^x$ $(0 < a < 1)$, $(-\infty, \infty)$ は連続で狭義単調減少

$y = \log x$, $(0, \infty)$ は連続で狭義単調増加

微分可能と微分係数

関数 $f(x)$ が x_0を含むある区間で定義されているとき，極限値

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=A\ \ (A\neq\pm\infty)$$

$x-x_0=h$とすれば同じ

が存在するならば，関数 $f(x)$ は，$x=x_0$で微分可能という

この極限値 Aを点 x_0 における微分係数といい，$f'(x_0)$ で表わす

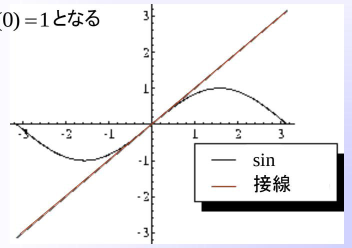
微分係数の計算例

例：$f(x)=\sin x$ の $x=0$ における微分係数 $f'(0)$ を求めてみよう

解：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)-\overbrace{\sin(0)}^{\sin 0=0}}{h}=\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{\sin(h)}{h}=1}_{前回の公式}$$

従って，$f'(0)=1$となる



導関数

関数 $f(x)$ が，ある区間 I の各点で微分可能のとき $f(x)$ は 区間 I で微分可能であるという

この場合，区間 I の各点に，そこでの微分係数を対応させることにより定まる関数を $f(x)$ の 導関数といい，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

で表わす．他にも，

$$y',\ (f(x))',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x),\ \frac{df(x)}{dx},\ Dy,\ Df(x)$$

などの表わし方もある．また，関数 $f(x)$ の導関数を求めることを微分するという．

導関数の計算例

例：$f(x)=2x^3$ を微分してみよう

解：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^3-2x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-2x^3}{h}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{2x^3}+6x^2h+6xh^2+2h^3-\cancel{2x^3}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{6x^2\cancel{h}+6x\cancel{h}^2+2\cancel{h}^3}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(6x^2+\underbrace{6xh+2h^2}_{0})$$

$$=6x^2$$

微分可能性と連続性の関係

定理2：

微分可能な関数は連続である

注意：

・連続であっても微分可能とは限らない

・連続だがいたるところで微分可能でない関数として，次のWeierstrassの関数が知られている

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x)$$

$$(0<a<1, b: 奇数, ab>1+3\pi/2)$$

導関数の性質

定理3：

$f(x), g(x), h(x)$が微分可能のとき次式が成り立つ

(1) $(cf(x))'=cf'(x)$　（ c は定数）

(2) $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$

(3) $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(4) $g(x)\neq 0\Rightarrow\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$，

特に，$\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)'=-\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$

主要関数の導関数の公式

◆多項式

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (ax^n)' = anx^{n-1} \quad (ax)' = a \quad (a)' = 0 \qquad n \in \mathbf{R}$$

◆三角関数

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

◆逆三角関数

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

◆指数関数と対数関数

$$(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \log a \quad (\log x)' = \frac{1}{x}$$

◆双曲線関数

$$(\sinh x)' = \cosh x \quad (\cosh x)' = \sinh x \quad (\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$$

導関数の公式における注意

◆多項式

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (ax^n)' = anx^{n-1} \quad (ax)' = a \quad (a)' = 0 \qquad n \in \mathbf{R}$$

において，$n \in \mathbf{R}$ であることに注意

従って，

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

導関数の性質と公式の利用例(1)

例：定理3の(1)，(2)と x^n に関する導関数の公式を仮定して，
$y = 3x^3 + 2x + 3$ の導関数を求めてみよう

解：

$$y' = (3x^3 + 2x + 3)'$$
$$= (3x^3)' + (2x)' + 3'$$
$$= 3 \cdot 3x^2 + 2$$
$$= 9x^2 + 2$$

$$\left(f(x) + g(x)\right)' = f(x)' + g(x)'$$

$$(ax^n)' = anx^{n-1}$$
$$(ax)' = a \quad (a)' = 0$$

導関数の性質と公式の利用例(2)

例：定理3の(4)と $\sin x, \cos x$ に関する導関数の公式を仮定して，
$\tan x$ の導関数を求めてみよう

解：

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$
$$= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f(x)'g(x) - f(x)g(x)'}{g(x)^2}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

合成関数の微分法

定理4：
$y = f(u)$，$u = g(x)$ がそれぞれ u, x の関数として微分可能ならば，合成関数 $y = f(g(x))$ も x の関数として微分可能で，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$

が成り立つ

$y = (x^3 + 1)^{10}$ のような関数の導関数を求めるとき，積の微分の公式を用いたり，展開して微分していたら大変面倒！！
このような場合，合成関数と見て，合成関数の微分法を利用！

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d(x^3+1)} \cdot \frac{d(x^3+1)}{dx} = 10(x^3+1)^9 \cdot 3x^2 = 30x^2(x^3+1)^9$$

合成関数の微分法の利用例(1)

例：$y = \cos(x^2 + x)$ を微分してみよう

解：
$\cos(x^2 + x)$ を $y = \cos u$ と $u = x^2 + x$ の合成関数とみて，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\sin u(2x+1) = -(2x+1)\sin(x^2+x)$$

$$(\cos u)' = -\sin u$$
$$(x^2 + x)' = 2x + 1$$

逆関数の微分法

定理5:
関数 $y=f(x)$ が微分可能な狭義単調関数で $f^{-1}(x)\neq 0$ ならば，その逆関数 $x=f^{-1}(y)$は $y=f(x)$ の値域で微分可能であり，

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y)=\frac{1}{\dfrac{d}{dx}f(x)} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

逆関数の微分法の利用例(1)

例: $y=\log x$の導関数を確認してみる
解:
$y=\log x$ は，$x=e^y$ の逆関数であった
従って，

$$\frac{d\log x}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{\dfrac{de^y}{dy}}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{e^{\log x}}=\frac{1}{x}$$

$$(e^x)'=e^x$$
$$e^{a\log x}=x^a$$

逆関数の微分法の利用例(2)

例: $y=\sin^{-1}x$の導関数を確認してみる
解:
$y=\sin^{-1}x$ は，$x=\sin y$ の逆関数であった
従って，

$$\frac{d\sin^{-1}x}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{\dfrac{d\sin y}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\sin x)'=\cos x$$
$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$