

関数：定義域、値域、区間、 合成関数、対数、指数

関数(1)

$y = x^2$ を考えると,

$$x = 1 \text{ とおけば } y = 1^2 = 1,$$

$$x = -1 \text{ とおけば } y = (-1)^2 = 1,$$

$$x = 5 \text{ とおけば } y = (5)^2 = 25,$$

と y が定まる

これは, $y = x^2$ という式が, x の個々の値に対して, どのような y を対応させるかを決定している

このように, x に対する y の対応の仕方を定める規則が与えられているとき, その規則を**関数**という

ようするに写像のことだが, 解析では関数と呼ぶ

関数(2)

f が集合 X から集合 Y への写像であるとき, これは $x \in X$ に, ある $y \in Y$ を対応させる規則を与えているので, f を関数と見て,

$$y = f(x)$$

とかく。このとき, x を独立変数, y を従属変数という

また, $X, Y, \{f(x) \mid x \in X\}$ をそれぞれ関数 f の 定義域, 終域, 値域 と呼ぶ

関数と全単射

関数 $y = f(x)$ において,

$f(x)$ が全射 \Leftrightarrow 終域 = 値域

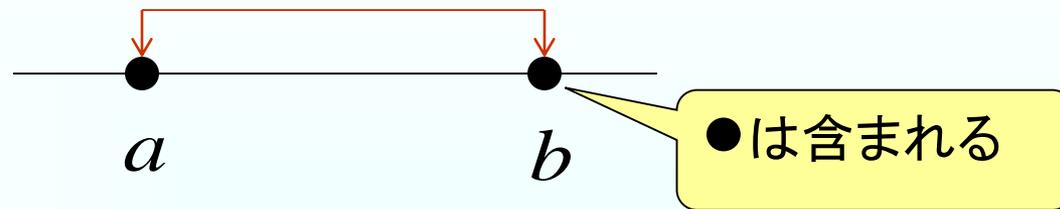
$f(x)$ が単射 $\Leftrightarrow x \neq x'$ ならば $f(x) \neq f(x')$

$f(x)$ が単射 $\Leftrightarrow x = x'$ ならば $f(x) = f(x')$

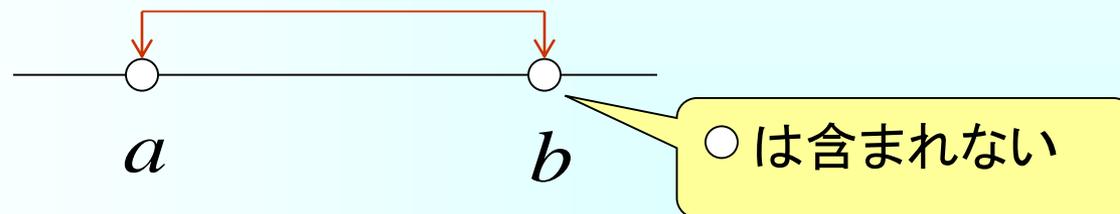
$f(x)$ が全射かつ単射なときは, 全単射という

区間(1)

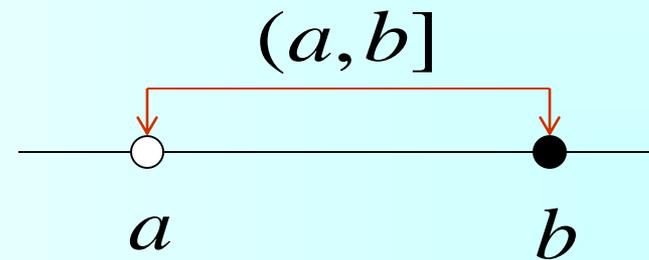
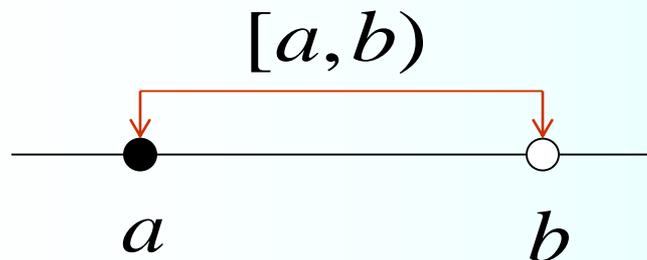
$\{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b, a, b \in \mathbf{R}\}$ を閉区間と呼び, $[a, b]$ とかく



$\{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b, a, b \in \mathbf{R}\}$ を开区間と呼び, (a, b) とかく

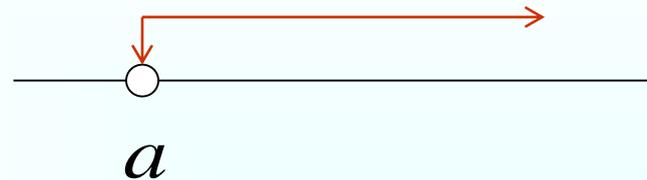


また, a, b の一方のみ含む集合を $[a, b)$ や $(a, b]$ で表わす

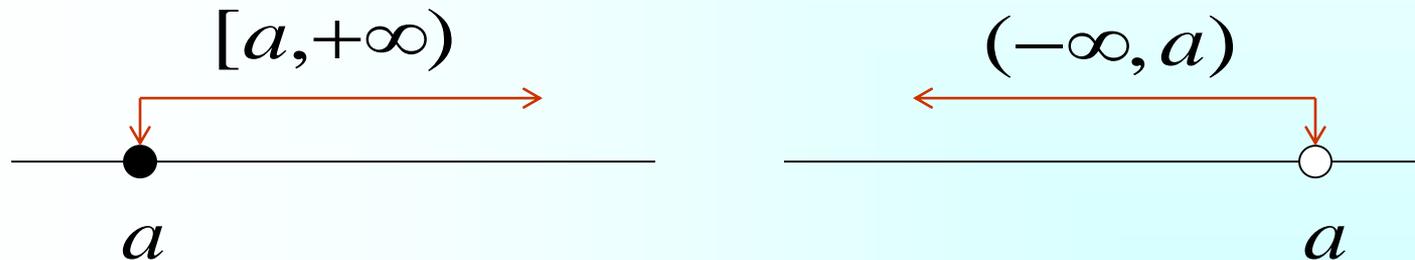


区間(2)

また, x が a よりも大きな任意の値をとるとき, すなわち, $\{x \in \mathbf{R} \mid a < x, a \in \mathbf{R}\}$ のときは, $(a, +\infty)$ と表わす



$[a, +\infty)$ や $(-\infty, a)$ も同様



$(-\infty, +\infty)$ は, 実数全体, すなわち \mathbf{R} を表わす

関数の例

◆ $f(x) = x + 1$

定義域は $(-\infty, +\infty)$, 終域は $(-\infty, +\infty)$, 値域は $(-\infty, +\infty)$

終域=値域なので全射

$f(x_1) = f(x_2)$ とすると $x_1 + 1 = x_2 + 1$ より $x_1 = x_2$ となるので単射
従って, $f(x)$ は全単射

◆ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

定義域は $(0, +\infty)$, 終域は $(0, +\infty)$, 値域は $(0, +\infty)$

終域=値域なので全射

$f(x_1) = f(x_2)$ とすると $\frac{1}{\sqrt{x_1}} = \frac{1}{\sqrt{x_2}}$ より $x_1 = x_2$ となるので単射

従って, $f(x)$ は全単射

合成関数(1)

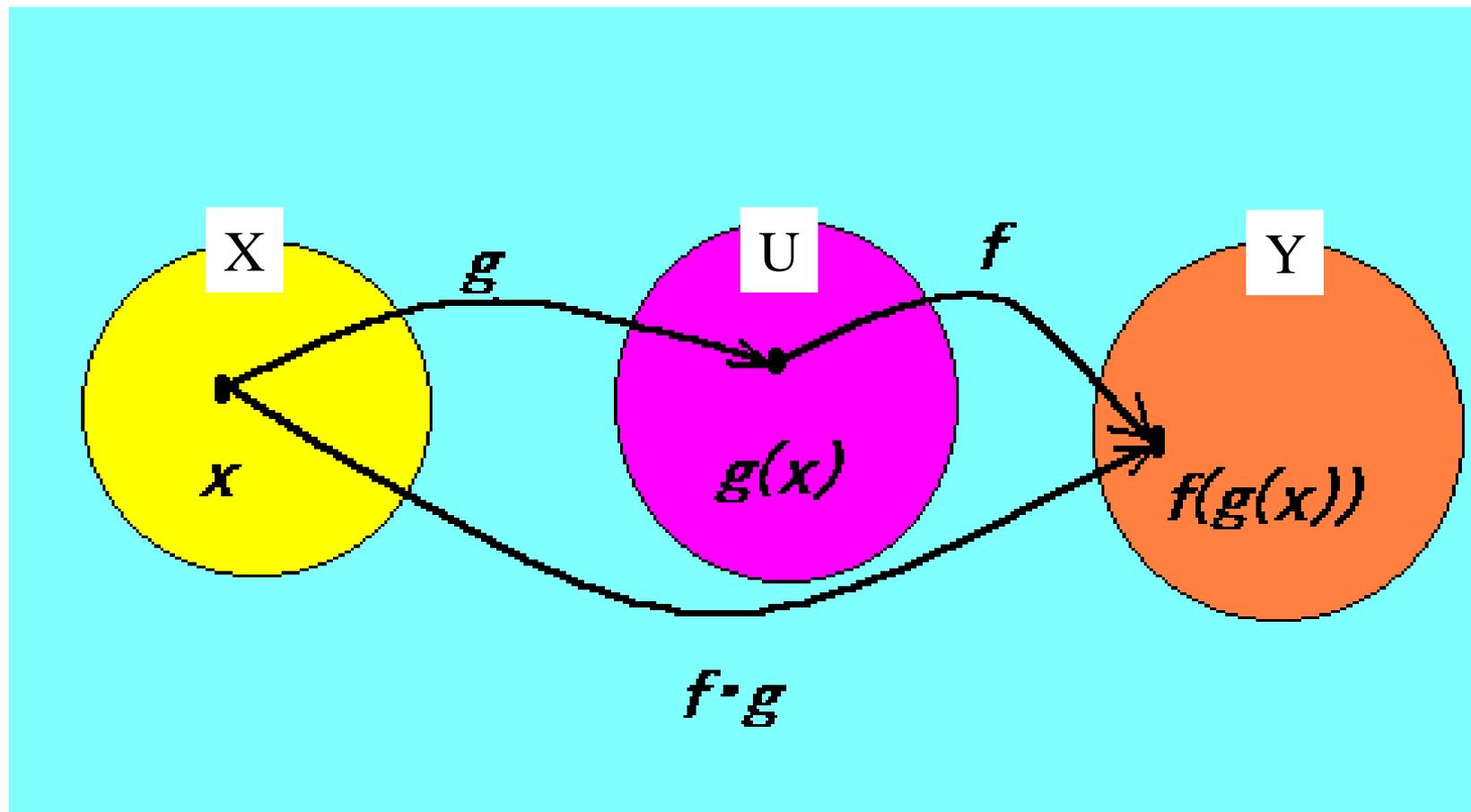
2つの関数

$$u = g(x), y = f(u)$$

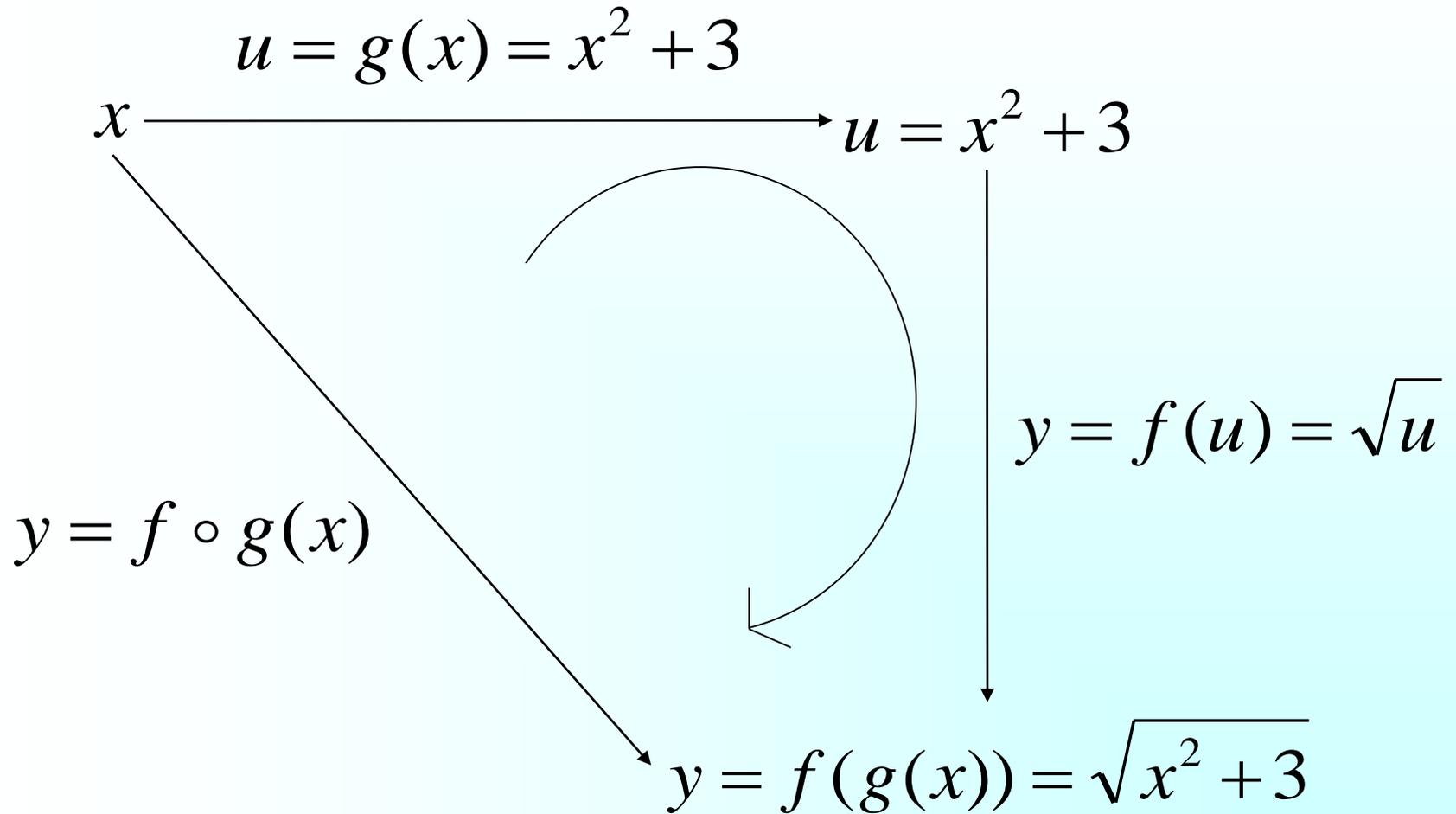
に対して, これを順に引き続いて施す関数 $y = f(g(x))$ を,
 g と f との合成関数とよび, $f \circ g$ で表わす

$$y = f(g(x)) \Leftrightarrow y = (f \circ g)(x)$$

合成関数(2)



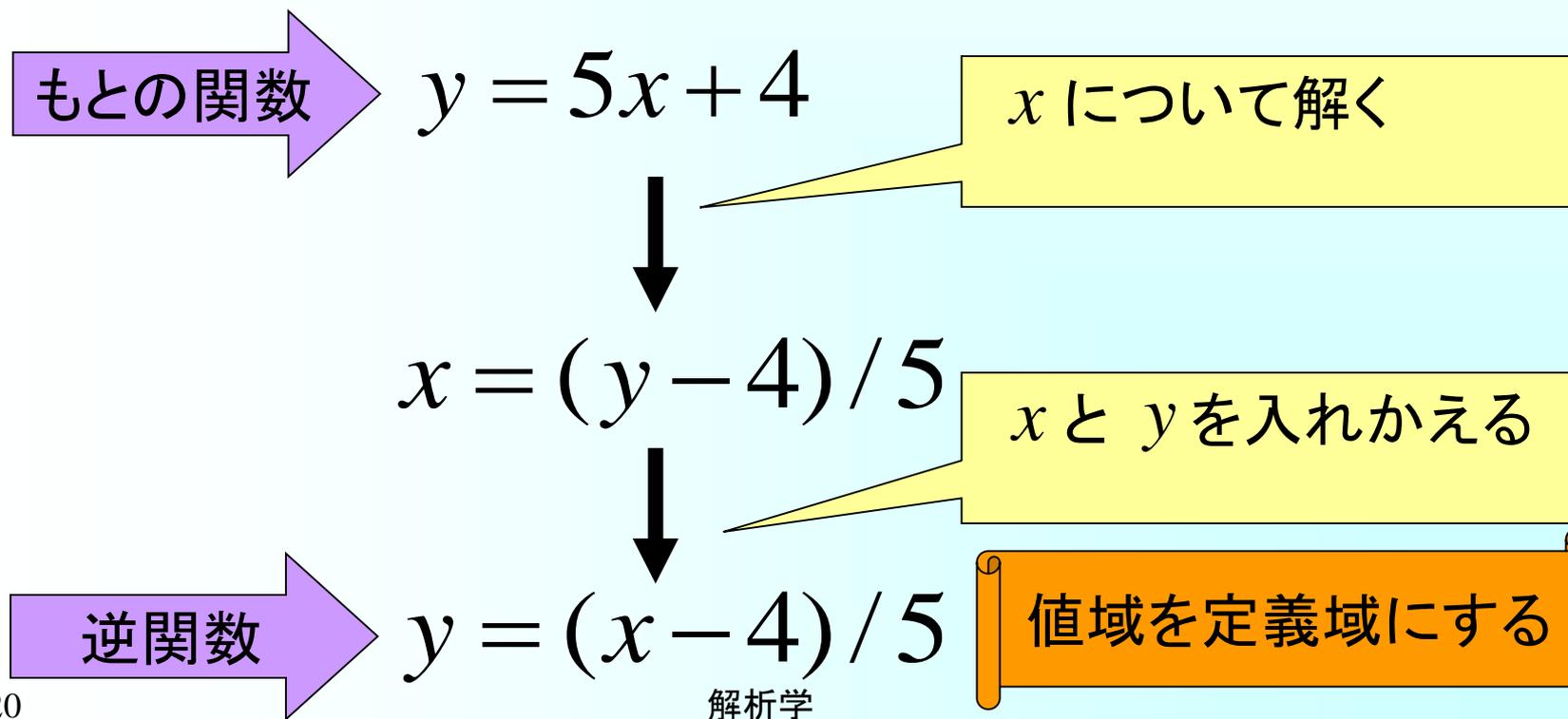
合成関数(3)



逆関数

一般に、全単射な関数 $y = f(x)$ では、 y の値に対して x の値が1つだけ決まる。 y に $y = f(x)$ なる x を対応させる関数を f の逆関数とよび f^{-1} で表わす

逆関数の求め方:



例題

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \quad x \in [2, 4], \quad g(x) = \frac{1}{9}x^2 + 2 \quad x \in [0, 3]$$

- (1) $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ を求めよ。
- (2) $g^{-1}(x)$ を求めよ。

解:

(1)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{9}x^2 + 2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}x^2 + 2\right) + 1 = \frac{1}{18}x^2 + 2$$

$$x \in [0, 3]$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 + 2 = \frac{1}{36}(x + 2)^2 + 2$$

$$x \in [2, 4]$$

(2) $y = g(x) = \frac{1}{9}x^2 + 2$ $x \in [0, 3]$ に対して, 値域は, $y \in [2, 3]$

$y = g(x)$ を x について解いて, $x = 3\sqrt{y-2}$

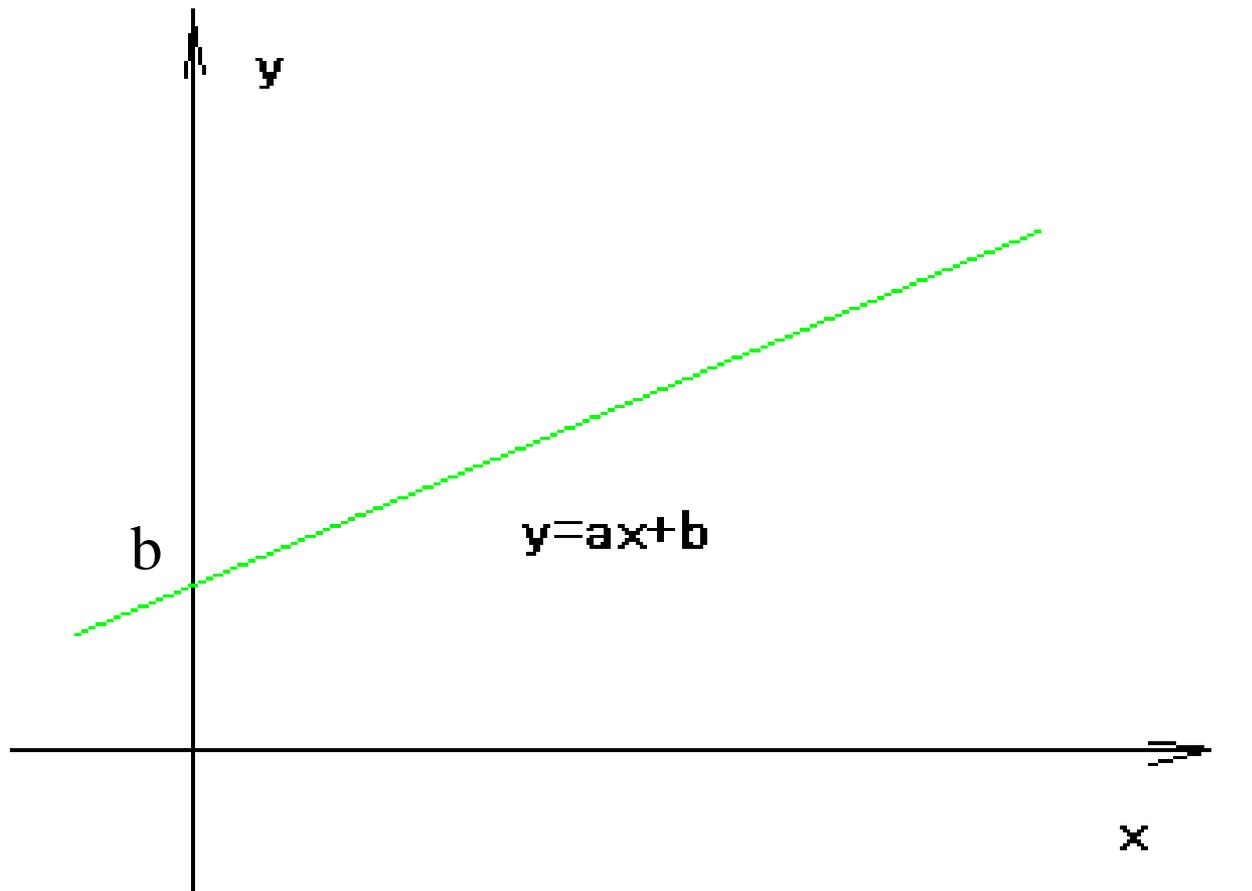
$x \in [0, 3]$, すなわち,
 $x \geq 0$ に注意

x と y を入れかえて, さらに定義域と値域も入れかえて,

$$y = g^{-1}(x) = 3\sqrt{x-2} \quad x \in [2, 3]$$

様々な関数---- 1次関数----

$$y = ax + b$$



様々な関数——指数関数(1)——

指数

$a \in \mathbf{R}, a > 0, n, m \in \mathbf{N}$ に対して,

$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n\text{個}}, a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ だった}$$

従って,

$$a^3 = a \times a \times a, a^{-3} = \frac{1}{a^3}, a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$$

では, $a^{\sqrt{2}}$ はどうか $\sqrt{2} = 1.414213\dots$ なので,

$a^{1.4}, a^{1.41}, a^{1.414}, \dots$ の極限を $a^{\sqrt{2}}$ と定義する

これで指数が有理数から実数に拡張できた

様々な関数——指数関数(2)——

指数法則

$a \in \mathbf{R}, a > 0, x, y \in \mathbf{R}$ に対して,

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

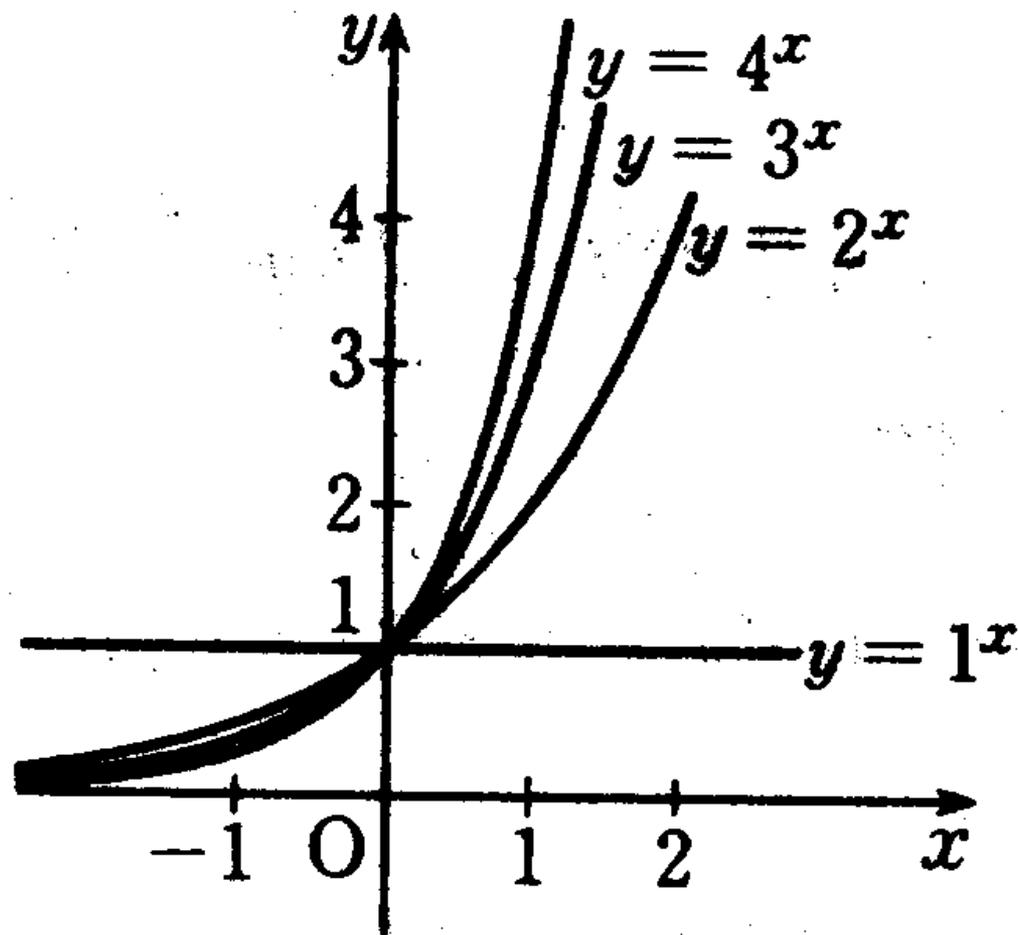
$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^0 = 1$$

様々な関数——指数関数(3)——

$$y = a^x \quad a > 0, a \neq 1$$



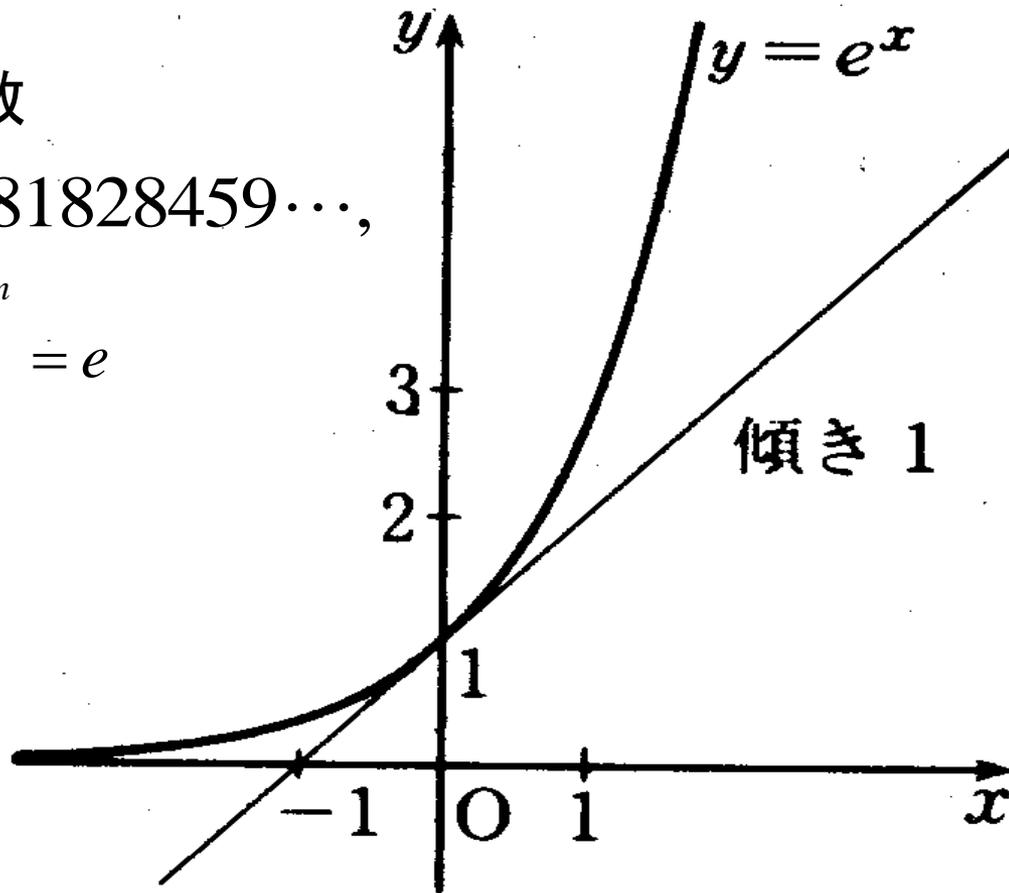
様々な関数——指数関数(4)——

$$y = e^x$$

e : ネーピア数

$e = 2.718281828459\dots$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$



様々な関数——対数関数(1)——

対数

$y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) のとき, 指数 x を a を底とする y の対数といい, $x = \log_a y$ とかく。このとき, y を対数 x の真数という。真数は常に正。

対数法則

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a 1 = 0$$

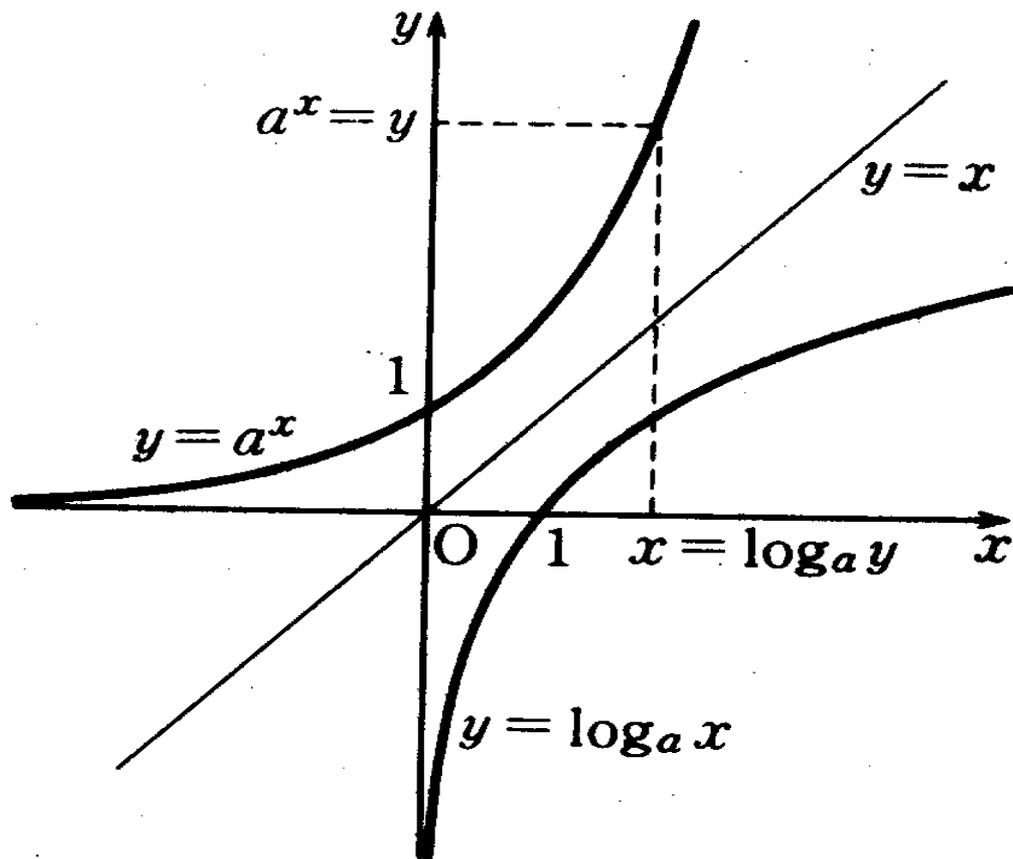
$$\log_a x^b = b \log_a x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

様々な関数---対数関数(2)---

指数関数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) の逆関数を $y = \log_a x$ で表わし, 対数関数と呼ぶ

とくに, $a = e$ の場合は, 自然対数と呼ばれ, 単に, $y = \log x$ とかく



様々な関数---三角関数(1)---

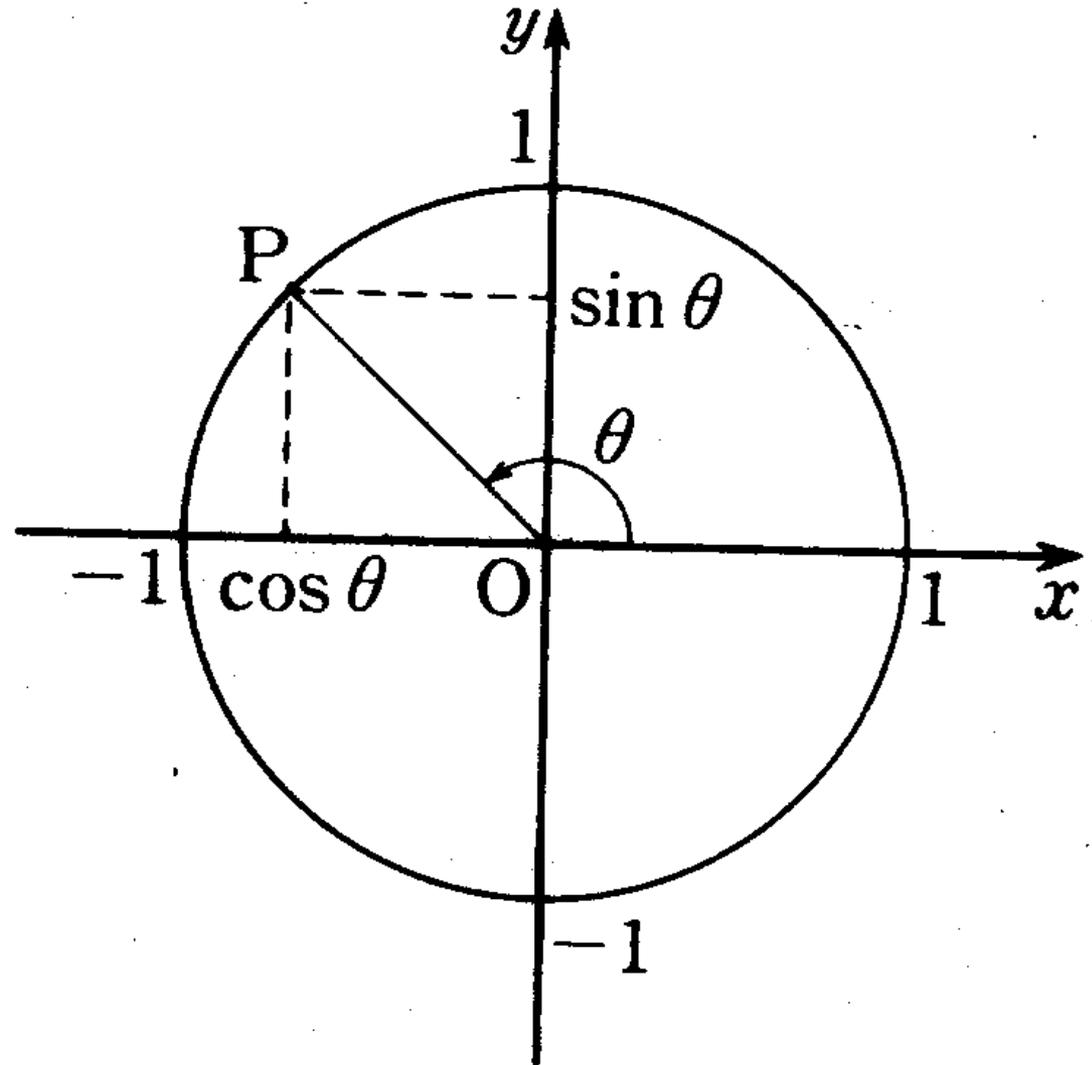
点Pのx座標が $\cos \theta$

点Pのy座標が $\sin \theta$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$360^\circ = 2\pi$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}$$



様々な関数----三角関数(2)----

三角関数に関する公式

相互関係

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

周期性

$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta \quad \sin(\theta + 2n\pi) = \sin \theta$$

加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

負角の公式

$$\cos(-\theta) = \cos \theta \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

様々な関数----三角関数(3)----

三角関数に関する公式

2倍角の公式

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

3倍角の公式

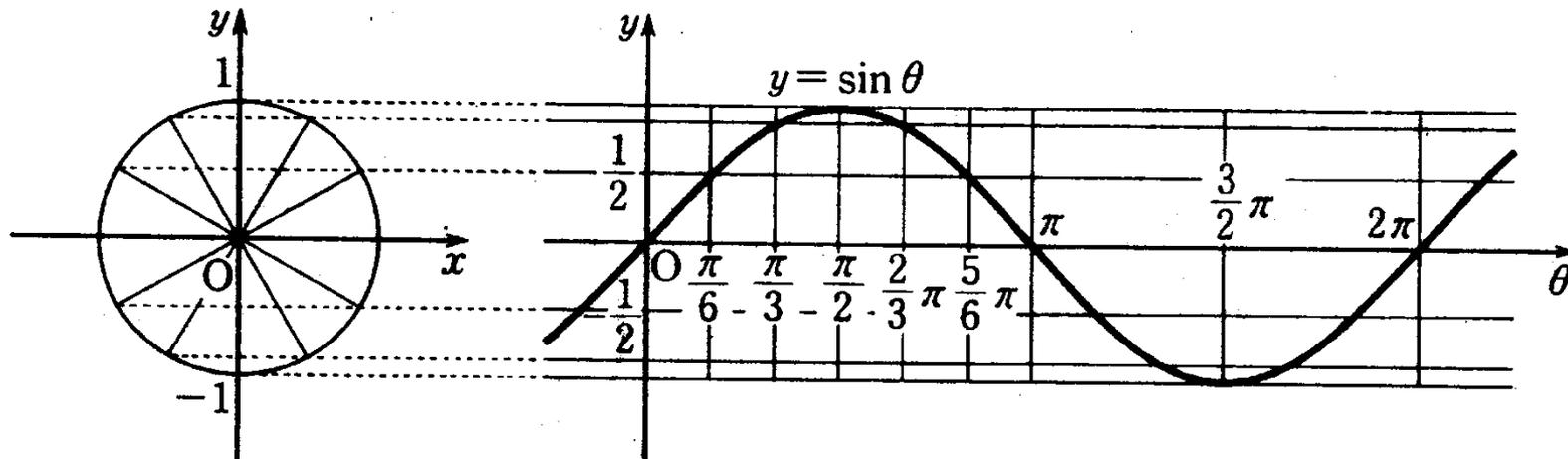
$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

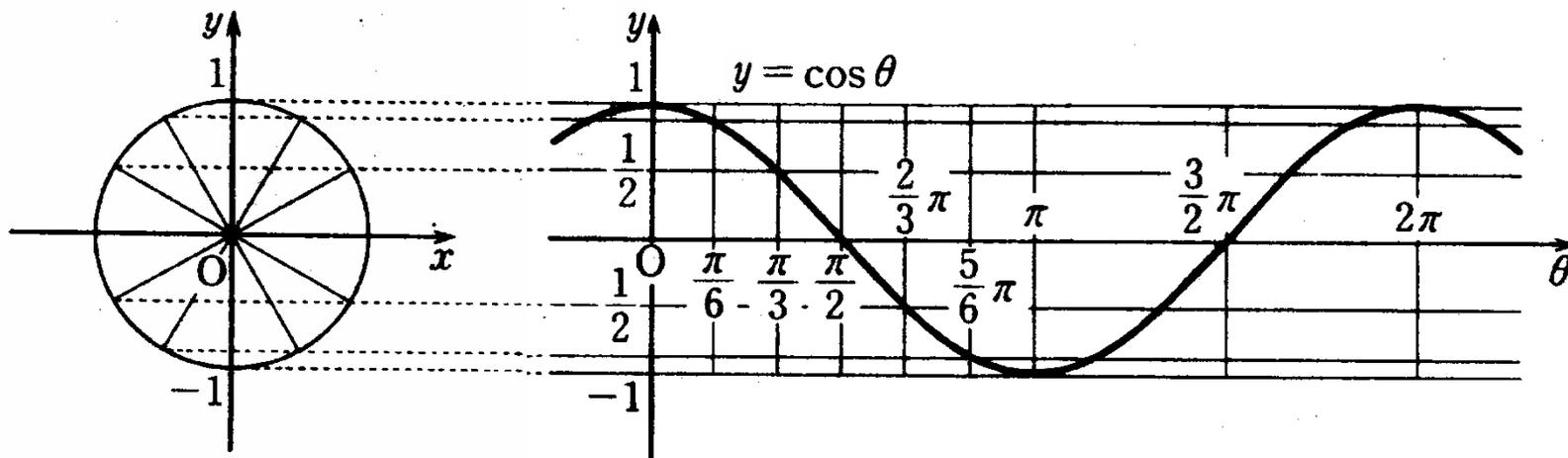
$$\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$$

様々な関数——三角関数 (4)——

$$y = \sin \theta$$



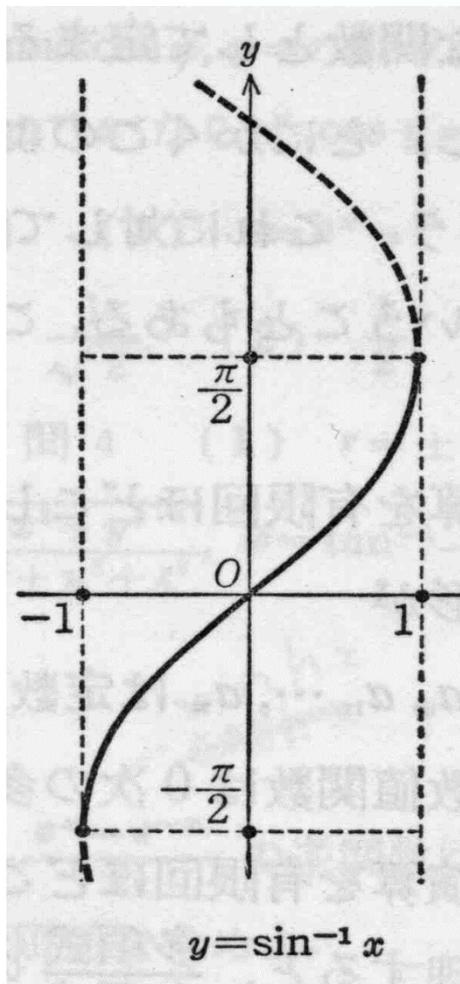
$$y = \cos \theta$$



逆三角関数(Inverse Trigonometric Function)

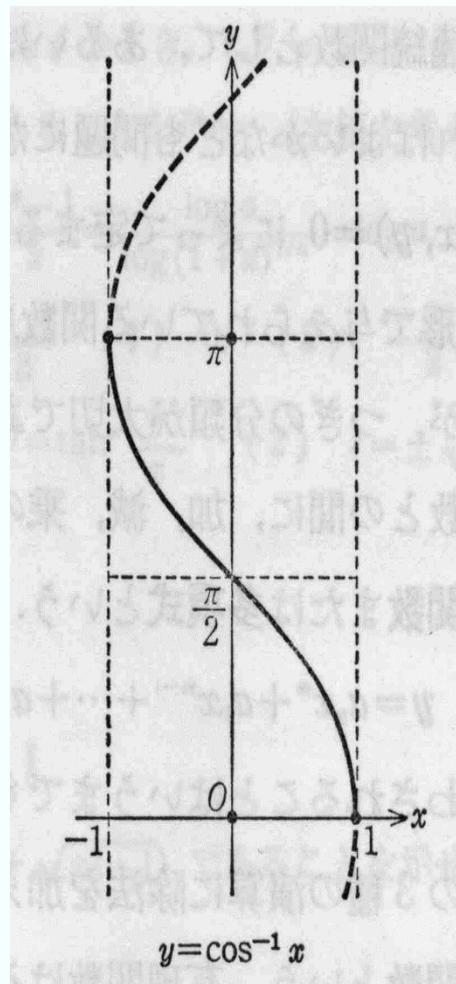
$$y = \sin^{-1} \theta$$

$$= \arcsin \theta$$



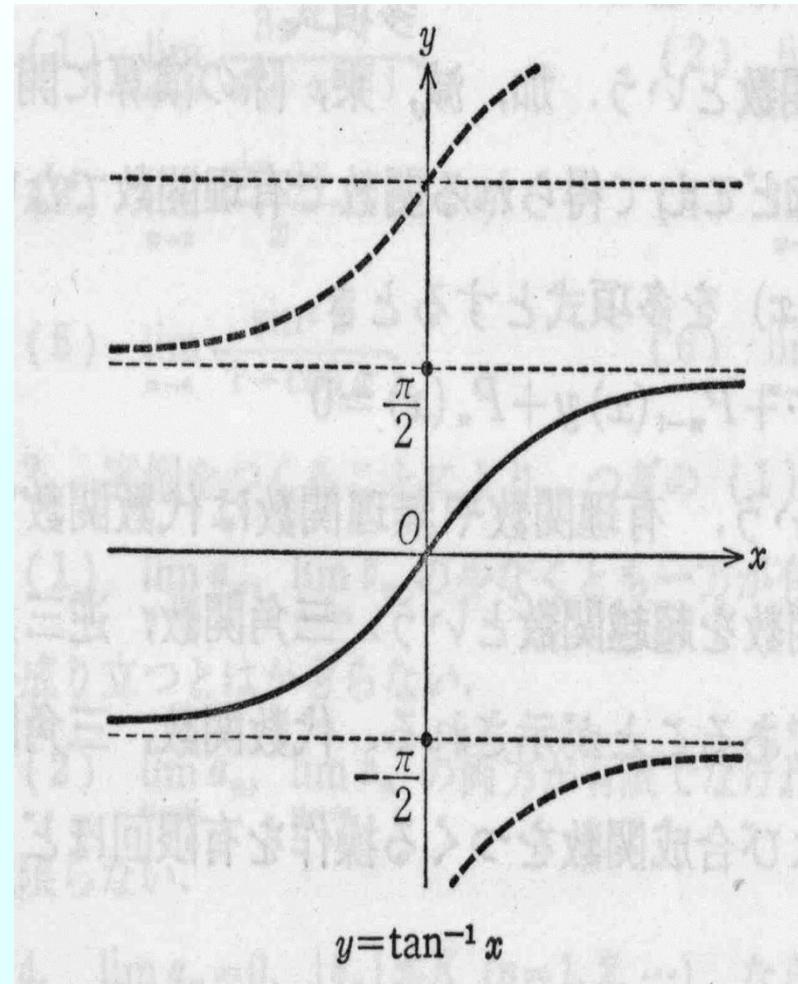
$$y = \cos^{-1} \theta$$

$$= \arccos \theta$$



$$y = \tan^{-1} \theta$$

$$= \arctan \theta$$



--双曲線関数(Hyperbolic Function)--

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$y = \sinh x$$

$$y = \cosh x$$

$$y = \tanh x$$

