高階導関数、級数、Taylor展開

高階導関数(higher order derivation)

導関数 $f'(x)$ が微分可能ならば，$f'(x)$ の導関数が考えられる．これを，$f''(x)$ で表わし，$f(x)$ の2階導関数という．$f''(x)$ が微分可能ならば，3階導関数 $f'''(x)$ が考えられる．このようにして，一般に $f(x)$ がn回微分可能ならば，n階導関数が考えられる．これを，$f^{(n)}(x)$ で表わす．すなわち，

$$f^{(1)}(x) = f'(x),\ f^{(2)}(x) = f''(x), \cdots$$

特に，

$$f^{(0)}(x) = f(x)$$

と定義しておく．2階以上の導関数を高階導関数という．n階導関数について，$f^{(n)}(x)$ の他にも，

$$y^{(n)},\quad \frac{d^n y}{dx^n},\quad \frac{d^n}{dx^n} f(x),\quad \frac{d^n f(x)}{dx^n},\quad D^n y,\quad D^n f(x)$$

のような表わし方がある．n階導関数はn次導関数ともいわれる．

高階導関数の計算例

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x = \sin(x + \frac{n\pi}{2}),\quad \frac{d^n}{dx^n}\cos x = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \frac{d}{d(x+\frac{\pi}{2})}\sin(x+\frac{\pi}{2})\cdot\frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{dx}}$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\sin x = \frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\sin x = \frac{d}{dx}\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x+\frac{\pi}{2})\cdot 1 = \sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\sin x = \frac{d}{dx}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\sin x = \frac{d}{dx}\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2}) = \cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2}) = \sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x = \frac{d}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\sin x = \frac{d}{dx}\sin(x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}) = \cos(x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}) = \sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

cos x のn次導関数も同様

$$\boxed{\cos(x+\theta) = \sin(x+\theta+\frac{\pi}{2})}$$

C^nクラスの関数(Differentiability class)

関数 $f(x)$ が，区間 I で少なくともn階まで微分可能で，かつ $f^{(n)}(x)$ が連続ならば，$f(x)$ を区間 I における C^nクラスの関数という．

C^0クラスの関数は連続関数に他ならない．

全てのnに対して C^nクラスの関数となっている $f(x)$ を C^∞クラスの関数という．

C^∞クラスの関数は何回でも微分可能な関数に他ならない．

e.g. $\sin x, \cos x, e^x, \cdots$ などは全て C^∞クラスの関数

不定形の極限値

これは強力!!

定理1（l'Hopitalの定理：$\frac{0}{0}$ の不定形の極限値）

$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \lim_{x\to a} g(x) = 0$ であっても，$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するときは，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

定理2（l'Hopitalの定理：$\frac{\infty}{\infty}$ の不定形の極限値）

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, -\infty, \lim_{x\to a} g(x) = \infty, -\infty$ であっても，$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するときは，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

定理1,2は $\lim_{x\to a}$ が $\lim_{x\to\infty}$ や $\lim_{x\to-\infty}$ であっても成り立つ

不定形の極限値の計算例

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a}\quad (a>0)$$

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ は $x \to 0$ のとき，$\frac{0}{0}$ の不定形になるので，l'Hopitalの定理を利用する

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a}$ は $x\to\infty$ のとき，$\frac{\infty}{\infty}$ の不定形になるので，ロピタルの定理を利用する

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{(x^a)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{ax^a} = 0$$

関数の多項式による表現

定理3（Maclaurinの定理）

$f(x)$ が原点0を含む開区間 $(-r,r)$ でn回微分可能ならば，$(-r,r)$ 内の任意の点 x と，任意の正数mに対して，

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x),$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n-1)}(\theta x)}{(n-1)!\cdot m}\cdot(1-\theta)^{n-m}\cdot x^n,\quad 0<\theta<1$$

をみたす θ が少なくとも1つ存在する

級数(series)

数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が与えられたとき，$a_1,a_2,a_3,\cdots$ の和の形に書かれた $a_1+a_2+a_3+\cdots$ を考え，それを級数と呼ぶ．

a_n を，その級数の第n項という．

級数 $a_1+a_2+a_3+\cdots$ は，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ のように表現される．

ここで，$s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおき，s_n を級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の第n部分和という．

部分和の作る数列 $\{s_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が s へ収束するとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は s へ収束するといい，s をその級数の和という．

このことを，記号

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=s \quad \text{または}, a_1+a_2+a_3+\cdots=s$$

で表わす．

級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束しないときは，発散するという．

級数(series)

定理：

数列 $\{ar^n\}_{n=1,2,\cdots}$ が与えられたとき，$s_n=\sum_{n=1}^{\infty}ar^n$ 　級数であると、次のことが成り立つ。

1) $|r|<1$ であるとき、級数が収束である $\sum_{n=1}^{\infty}ar^n=s=\frac{ar}{1-r}$

2) $|r|>1$ と $a\neq 0$ であるとき、級数が発散である $\sum_{n=1}^{\infty}ar^n=+\infty$

級数の例(1)

数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1,2,\cdots}$ を考えると，$a_1=\frac{1}{2},a_2=\frac{1}{2^2},a_3=\frac{1}{2^3},\cdots$ となっている．この級数を考えると，

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

である．この級数の第n項は，もちろん $\frac{1}{2^n}$ である．

第n部分和は，$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$ である．

従って，部分和の作る数列

$$s_1=\frac{1}{2},s_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2},s_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3},\cdots,s_n=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}},\cdots$$

を考えると，$\lim_{n\to\infty}s_n=1$

従って，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ は1へ収束する

級数の例(2)

同じく，数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1,2,\cdots}$ を考えると，$a_1=\frac{1}{1},a_2=\frac{1}{2},a_3=\frac{1}{3},\cdots$ となっている．この級数を考えると，

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

である．

この級数は調和級数として知られており，実は，発散する

調和級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 　は発散

整級数(ベキ級数:power series)

a_n の代わりに関数 $f_n(x)$ を考えれば，関数項級数と呼ばれる

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots$$

が得られる．区間 I の各点 x で級数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ が収束するとき，関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ は I で収束するという．I の各点 x で発散するときは，I で発散するという．

$f_{n+1}(x)=c_n(x-a)^n$（c_n,a は定数）の形の関数項級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots$$

を整級数またはベキ級数という．

$a=0$ の場合の整級数は，

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$$

の形となる．

Taylor展開 (Taylor Development)

定理4

$f(x)$ が原点0を含む区間 I で C^∞クラスの関数であるとき，マクローリンの定理における剰余項 $R_n(x)$ が I の各点 x で

(1) $\quad R_n(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$

を満たしていれば, $f(x)$ は I で,

(2) $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \cdots$

のように整級数に展開される.

特に, I の全ての点 x に対して

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \le K \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となるような定数 K が存在する場合は(1)が満たされ (2) の展開が可能である.(2)の右辺を $f(x)$ の $x=0$ まわりのTaylor展開という.

$\sin x$ のTaylor展開

$f(x) = \sin x$ とおくと, $f(x)$ は $(-\infty, \infty)$ で C^∞クラスの関数である.

また, $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して,

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \sin x = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$$

従って,

$$f^{(2n)}(0) = \sin(\frac{2n\pi}{2}) = \sin n\pi = 0$$

$$f^{(2n+1)}(0) = \sin(\frac{(2n+1)\pi}{2}) = \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n$$

特に, $\left| f^{(n)}(x) \right| = \left| \sin(x + \frac{n\pi}{2}) \right| \le 1$

従って, 定理4よりTaylor展開可能で,

$$\sin x = 0 + \frac{(-1)^0}{1!} x + \frac{0}{2!} x^2 + \frac{(-1)^1}{3!} x^3 + \cdots + \frac{0}{2n!} x^{2n} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots$$

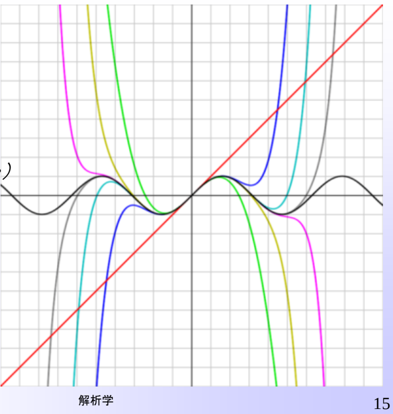
$$= x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

0近辺でsin(x) と Taylor展開のグラフ

多項式の級: 1, 3, 5, 7, 9, 11 and 13.

(polynomials of degree)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$



主要な関数のTaylor展開

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots \quad (-1 < x \le 1)$$

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1} x + \binom{a}{2} x^2 + \cdots + \binom{a}{n} x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

但し, $a \in \mathbf{R}$, $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$

$$\ln(1+\cos x) = \ln 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} - \frac{x^6}{1440} - \frac{17x^8}{322560} - \frac{31x^{10}}{7257600} - \cdots$$

例題:商関数

$$g(x) = \frac{e^x}{\cos x}.$$

分子関数と分母関数のTaylor展開と予想結果:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$\frac{e^x}{\cos x} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

$$e^x = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots) \cos x$$

$$= (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)$$

$$= c_0 - \frac{c_0}{2} x^2 + \frac{c_0}{4!} x^4 + c_1 x - \frac{c_1}{2} x^3 + \frac{c_1}{4!} x^5 + c_2 x^2 - \frac{c_2}{2} x^4 + \frac{c_2}{4!} x^6 + c_3 x^3 - \frac{c_3}{2} x^5 + \frac{c_3}{4!} x^7 + \cdots$$

予想結果:c0,c1,c2,...,cn等を求める

$$= c_0 + c_1 x + \left(c_2 - \frac{c_0}{2}\right) x^2 + \left(c_3 - \frac{c_1}{2}\right) x^3 + \left(c_4 + \frac{c_0}{4!} - \frac{c_2}{2}\right) x^4 + \cdots$$

結果:

$$\frac{e^x}{\cos x} = 1 + x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \cdots$$