極限

極限

関数 $f(x)$ において，
x が限りなく a へ近づくとき，
$f(x)$ が限りなく b に近づくならば，
x が a に近づくときの $f(x)$ の極限値(limit)は b であるといい，

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \quad \text{または，}\ f(x)\to b \quad (x\to a)$$

で表わす

$$e.g.\ \lim_{x\to 2} x^2 = 4 \ \text{または}\ x^2 \to 4\ (x\to 2)$$

極限の基本性質

有限であるのがポイント
∞などのときは一般にはダメ

定理 1

$\lim_{x\to a} f(x),\ \lim_{x\to a} g(x)$ が存在して、それらの極限値が有限ならば、

(1) 任意の定数 c に対して，$\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$

(2) $\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

(3) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$

(4) $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$ のときは，$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

はさみうち

(5) $f(x)\le h(x)\le g(x)$ で $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = A$ ならば，
$\lim_{x\to a} h(x)$ も存在し $\lim_{x\to a} h(x) = A$

極限の基本性質の利用例

(1) $\lim_{x\to 3} 4x^2 = 4\lim_{x\to 3} x^2 = 4\cdot 9 = 36$

(2) $\lim_{x\to 1}(x^2+x) = \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} x = 1+1 = 2$

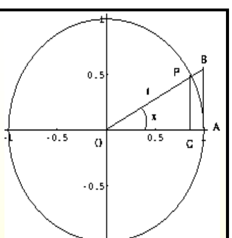
(3) $\lim_{x\to 2} x\sqrt{x} = \lim_{x\to 2} x\cdot\lim_{x\to 2}\sqrt{x} = 2\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

(4) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x} = \dfrac{\lim_{x\to 2}(x-1)}{\lim_{x\to 2} x} = \dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\cos 0 = 1$

(5) $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{1}{\cos x}$ で $\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x} = 1$ なので，
$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ も存在し $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ について(1)



$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ なる角度 x に対して

右図の ΔOPC，

扇形(せんけい：$fan-shape$) OAP，

ΔOAB を考えると，

$\Delta OPC \le$ 扇形 $OAP \le \Delta OAB$

$\Delta OPC = \dfrac{1}{2}\cdot\cos x\cdot\sin x$, 扇形 $OAP = \dfrac{x}{2}$, $\Delta OAB = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x$

よって，$\dfrac{1}{2}\cos x\cdot\sin x < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\tan x}{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\sin x > 0$ より，$\cos x < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ について(2)

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

注意！
$0 < a < x < b$ のとき、$\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{a}$

$\lim_{x\to 0}\cos x = 1$, $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x} = 1$ より，$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

極限の基本性質における注意

(2) $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$ や

(4) $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ のときは，$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

において，形式的に x に a を代入した結果，

$\infty-\infty$ や $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$ になってしまうような場合には，

極限値が存在するかどうかわからない。
存在する場合は，不定形(indeterminate)の極限値と呼ばれる。
不定形の極限値を求める場合には，式変形などを行い，約分をして不定形でなくするとか，
ケースバイケースで，色々考えなければならない。
この他にも，$1^\infty, 0^0, \infty^0$ など，
様々な不定形があるので注意する。

不定形の極限値

e.g. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ の極限値を求める

解：
まず，$x\to 2$ のとき，
分子$=x^2-3x+2\to 0$，分母$=x^2-4\to 0$ なので，
$\frac{0}{0}$ の不定形の極限値である。
従って，工夫を必要とする。

不定形でなくなった

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

例題(1)

次の極限値を求めよ

不定形　不定形

(a) $\lim_{x\to 2}(x^2+4x)$　(b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$　(c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(a) $\lim_{x\to 2}(x^2+4x) = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 4x = 4+8 = 12$

(b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-3\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2}}{1-4\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{(1+x)-(1-x)} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\cancel{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 2\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 1$$

例題(2)

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いて，$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ 極限値を求めよ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}$$

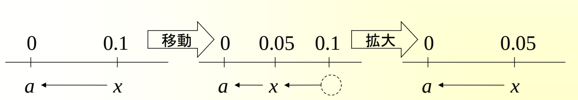
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}}\cdot\frac{2}{3} = 1\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

極限の再検討

極限値の定義では，関数 $f(x)$ において，
x が限りなく a へ近づくとき，
$f(x)$ が限りなく b に近づくならば，
x が a に近づくときの $f(x)$ の 極限値(limit)は b である
としていた

この辺が，厳密性に欠け曖昧！

「x が限りなく a へ近づく」とはどういう意味か？



$\varepsilon\delta$ 論法を用いた極限の再定義

任意の正数 ε に対して、適当な正数 δ を選ぶと，

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$

が成り立つとき，点 a で $f(x)$ は b に収束(convergent)するといい，b を点 a における $f(x)$ の極限値という

このことを，

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad または，\ f(x)\to b \quad (x\to a)$$

で表わす

どんなに小さな ε を指定され，$f(x)$ と b の距離を ε 以下にできるかと無理難題をいわれても，うまく δ を見つけてきて，x と a の距離が δ 以下の場合にはできますよと主張できる

$\varepsilon\delta$ 論法の利用の仕方

例(1): $\varepsilon\delta$ 論法による $\lim_{x\to 1} 2x = 2$ の証明

解:

どんなに小さな $\varepsilon > 0$ に対しても，うまくδ を選んでやって，

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |2x-2| < \varepsilon$$

が成り立つことを示せばよい

そこで，$|x-1|$ と $|2x-2|$ を見比べ $|2x-2| = 2|x-1|$ に着目

よって，$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ と選んでやれば，

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |2x-2| = 2|x-1| < 2\cdot\delta = 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となる

例(2): $\varepsilon\delta$ 論法による $\lim_{x\to 1} 4x^2 = 4$ の証明

解:

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |4x^2 - 4| < \varepsilon$

が成り立つような δ が存在することを示せばよい

$|x-1|$ と $|4x^2-4|$ を見比べ，$|4x^2-4| = 4|x+1||x-1|$

に着目

そこでまず，$\delta = 1$とおくと，$|x-1| < \delta = 1$より $|x+1| < 3$がいえる

このとき，

$$|4x^2-4| = 4|x+1||x-1| < 4\cdot 3|x-1| < 12\delta$$

三角不等式

|a+b|≦|a|+|b|を使用

$|4x^2-4| < \varepsilon$ とするには，$\delta = \frac{\varepsilon}{12}$ と選ぶ必要もある

よって，δ を 1 と $\frac{\varepsilon}{12}$ の小さいほうとなるように選ぶと，

$$|x-1| < \delta \le 1, \frac{\varepsilon}{12} \Rightarrow$$

$$|4x^2-4| = 4|x+1||x-1| \le 12|x-1| < 12\cdot\delta \le 12\cdot\frac{\varepsilon}{12} = \varepsilon$$

例(3): $\varepsilon\delta$ 論法による $\lim_{x\to 1} 4x^2 = 4$ の証明(別解)

解:

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |4x^2 - 4| < \varepsilon$

が成り立つような δ が存在することを示せばよい

$|x-1|$ と $|4x^2-4|$ を見比べ，$|4x^2-4| = 4|x+1||x-1|$

に着目。一方，

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |x+1| = |x-1+2| \le |x-1| + 2 < \delta + 2$$

このとき，

$$|4x^2-4| = 4|x+1||x-1| < 4\cdot(\delta+2)\delta$$

$|4x^2-4| < \varepsilon$ とするには，$\delta = \sqrt{1+\frac{\varepsilon}{4}} - 1$ と選べばよい

実際，

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |4x^2-4| = 4|x+1||x-1| < 4(\delta+2)\delta$$

$$= 4\left(\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{4}}+1\right)\left(\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{4}}-1\right) = \varepsilon$$