定積分(2)

定積分の計算原理[復習]

定理:

閉区間$[a,b]$で連続な関数 $f(x)$ の一つの原始関数を $F(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

である.

$F(b)-F(a)$ を $\left[F(x)\right]_a^b$や $\left[F(x)\right]_{x=a}^{x=b}$で表わすことが多い.
この記法によれば,

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

定積分の計算例(1)[復習]

$$\int_0^1 (2x-3)dx$$

$$\int_0^1 (2x-3)dx = [x^2-3x]_0^1 = (1-3)-(0-0) = -2$$

定積分の計算は原始関数を求め, 積分範囲の端点を代入し, その差を求めればよい

定積分の計算例(2)[復習]

$$\int_0^1 e^{ax}dx \quad (a \neq 0),\quad \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$$

$$\int_0^1 e^{ax}dx = [\frac{1}{a}e^{ax}]_0^1 = \frac{1}{a}e^a - \frac{1}{a}e^0 = \frac{1}{a}(e^a - 1)$$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\log(1+x^2)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(\log 2 - \log 1) = \frac{1}{2}\log 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x (\sin x)' dx = \left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sin^3 \frac{\pi}{2} - \sin^3 0\right) = \frac{1}{3}$$

置換積分を用いた定積分の計算

定理1:

$f(x)$ が$[a,b]$で連続で, $x = \phi(t)$が$[\alpha, \beta]$で微分可能で, $\phi'(t)$が連続であり, $a = \phi(\alpha), b = \phi(\beta)$ ならば,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

置換積分を用いた定積分の計算例(1)

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$$

$t = \sqrt{x}$ とおくと, $x = t^2, dx = 2tdt$ で, $x = 0$のとき $t = 0$, $x = 1$ のとき, $t = 1$. 従って,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+t}2tdt = \int_0^1 \frac{2(1+t)-2}{1+t}dt$$

$$= \int_0^1 \left(2 + \frac{-2}{1+t}\right)dt = [2t]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt$$

$$= (2-0) - 2[\log(1+t)]_0^1 = 2 - 2(\log 2 - \log 1)$$

$$= 2 - 2\log 2 = 2(1 - \log 2)$$

置換積分を用いた定積分の計算例(2)

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$$

$x=a\sin t$ とおくと，$dx=a\cos t dt$ で，$x\in[-a,a]$ のとき

$t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$．$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{\cos^2 t}$

ここで，$t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ のとき，$\cos t>0$ なので $\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$

従って，

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\cdot a\cos t dt=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin 2\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin 2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin(-\pi)\right)\right)=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{a^2\pi}{2}$$

偶関数と奇関数

関数 $f(x)$ が $f(-x)=f(x)$ なるとき，$f(x)$ を偶関数という.

また，関数 $f(x)$ が $f(-x)=-f(x)$ なるとき，$f(x)$ を奇関数という.

例：

$f(x)=x^2$ は偶関数.　$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$

$f(x)=x^3$ は奇関数.　$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$

$f(x)=\cos x$ は偶関数.　$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$

$f(x)=\sin x$ は奇関数.　$f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \quad (-\infty<x<\infty)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad (-\infty<x<\infty)$$

定積分の計算の簡略化(1)

定理2：

(1) $f(x)$ が偶関数ならば，$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$

(2) $f(x)$ が奇関数ならば，$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

証明：

(1) $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{a}f(x)dx$ と表わせるので，

$f(x)=f(-x)$ より $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(-x)dx+\int_{0}^{a}f(x)dx$

ここで，$t=-x$ とおくと，$dt=-dx$．また，$x=-a,0$ のとき $t=a,0$

よって $\int_{-a}^{0}f(-x)dx=-\int_{a}^{0}f(t)dt=\int_{0}^{a}f(t)dt=\int_{0}^{a}f(x)dx$．

これより，

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$$

(2)も同様

定積分の計算の簡略化(2)

$$\int_{-1}^{1}(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\,dx$$

$$\int_{-1}^{1}(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\,dx=2\int_{0}^{1}(x^4+x^2+1)\,dx$$

$$=2\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+1\right)=2\frac{3+5+15}{15}=\frac{46}{15}$$

部分積分を用いた定積分の計算

定理3:

$f'(x),g'(x)$ が $[a,b]$ で連続ならば，次式が成り立つ.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx=\left[xf(x)\right]_a^b-\int_a^b xf'(x)dx$$

部分積分を用いた定積分の計算例(1)

$$\int_1^2 x\log x dx$$

$$\int_1^2 x\log x dx=\frac{1}{2}\int_1^2\left(x^2\right)'\log x dt$$

$$=\frac{1}{2}\left([x^2\log x]_1^2-\int_1^2 x^2(\log x)'dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left((4\log 2-\log 1)-\int_1^2 x^2\frac{1}{x}dx\right)=\frac{1}{2}\left(4\log 2-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(4\log 2-\frac{1}{2}(4-1)\right)=\log 2-\frac{3}{4}$$

部分積分を用いた定積分の計算例(2)

$$\int_0^1 x^2 e^x dx$$

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = \int_0^1 x^2 \left(e^x\right)' dt = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 \left(x^2\right)' e^x dx$$
$$= (1e^1 - 0e^0) - \int_0^1 2xe^x dx = e - 2\int_0^1 x\left(e^x\right)' dx$$
$$= e - 2\left([xe^x]_0^1 - \int_0^1 (x)' e^x dx\right) = e - 2\left((1e^1 - 0e^0) - \int_0^1 e^x dx\right)$$
$$= e - 2\left(e - [e^x]_0^1\right) = e - 2\left(e - (e^1 - e^0)\right) = e - 2$$

定積分と面積

定積分と面積

閉区間$[a,b]$で常に$g(x) \le f(x)$のとき，2 曲線$y = f(x)$,　$y = g(x)$および 2 直線$x = a, x = b$で囲まれた部分の面積をAとし定積分で表わしてみる.

まず$[a,b]$の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

をとり，各小区間$[x_{i-1}, x_i]$から任意の点ξ_iをとる. ここで底辺$x_i - x_{i-1}$，高さ$f(\xi_i) - g(\xi_i)$の長方形を考え，その和を作ると

$$\sum_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i) - g(\xi_i)\right)(x_i - x_{i-1})$$

ここで分割Δを細かくすると，この和は

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

に収束し，面積を表わす.

定積分による面積の計算例(1)

例：次の曲線で囲まれた図形の面積を求めてみよう

$$x = y^2, \qquad y = x - 2$$

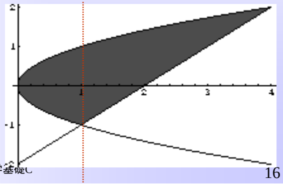
解：

この図で縦方向の長方形を考えると $x = y^2, y = x - 2$ の交点を通る直線 $x = 1$ より左側では，長方形の高さが $\sqrt{x} - (-\sqrt{x})$ となり，右側では $\sqrt{x} - (x-2)$ となる．よって，求める面積 A は

$$A = \int_0^1 2\sqrt{x}dx + \int_1^4 \left(\sqrt{x} - (x-2)\right)dx = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^4$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{3}{2}[4^{\frac{3}{2}} - 1] - \frac{1}{2}[4^2 - 1] + 2[4-1]$$

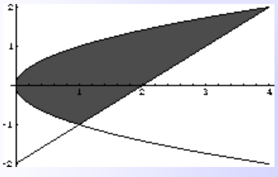
$$= \frac{4}{3} + \frac{14}{3} - \frac{15}{2} + 6 = \frac{9}{2}$$



定積分による面積の計算例(2)

次に，横方向の長方形を考えると，長方形の高さは求める図形内のすべての範囲で $y + 2 - y^2$，幅はΔy となり，計算が簡単になる．実際$x = y^2, y = x - 2$ の交点を求めると， $y^2 = y + 2$ より$y^2 - y - 2 = (y+1)(y-2) = 0$．よって $y = -1, 2$ となります．これより求める面積 A は

$$A = \int_{-1}^2 (y + 2 - y^2)dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$



定積分と体積

x 軸に垂直な平面で切ったときの切り口の面積が $S(x)$ となるような空間図形を考える．この空間図形の $a \le x \le b$ の部分の体積を定積分で表わしてみる．

まず $[a, b]$ の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

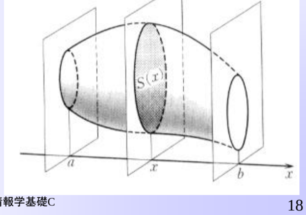
をとり，各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ から任意の点 ξ_i をとる．この図形の $x_{i-1} \le x \le x_i$ の部分を底面積 $S(\xi_i)$，高さ $x_i - x_{i-1}$ で置き換えて，その体積の和を作ると，

$$\sum_{i=1}^n S(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

ここで分割 Δ を細かくすると，この和は

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

に収束する．



定積分による体積の計算例

例：放物線 $y=(x-2)^2$ と x 軸，y 軸とが囲む部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V を求めよ。

解：

$S(x)=\pi y^2$ なので，求める体積 V は

$$V=\int_0^2 S(x)dx=\pi\int_0^2 y^2 dx=\pi\int_0^2 (x-2)^4 dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}(x-2)^5\right]_0^2=\frac{32}{5}\pi$$