定積分

有界関数

定義域を D とする関数 $f(x)$ において，すべての $x(\in D)$ に対して，$f(x) \le K[f(x) \ge K]$ をみたす定数 K が存在すれば，

$f(x)$ は**上に有界**[**下に有界**]であるという．

上に有界でありかつ下に有界ならば，単に，**有界**であるという．

定積分の定義(1)

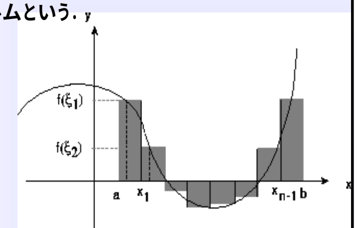
閉区間 $[a,b]$ 上の有界関数 $f(x)$ を考える．区間 $[a,b]$ の分割

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b$$

に対して

$$\|\Delta\| = \max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$$

とおき，$\|\Delta\|$ を分割 Δ のノルムという．



定積分の定義(2)

各小区間$[x_{i-1}, x_i]$から1点ξ_iをとり，

$$S_\Delta = S_\Delta(\{\xi_i\}) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

とおく．ξ_iを$[x_{i-1}, x_i]$からとるとり方がどうであっても，一定の極限値

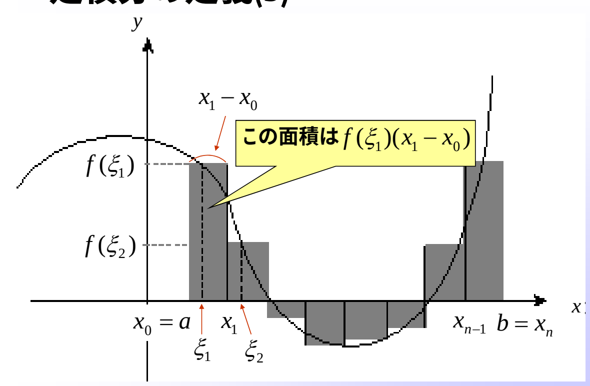
$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S_\Delta(\{\xi_i\}) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = S$$ が存在するとき，

$f(x)$は$[a,b]$で積分可能(integrable)であるという．また，極限値 Sを

$$\int_a^b f(x)dx \quad \left(= S = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right)$$

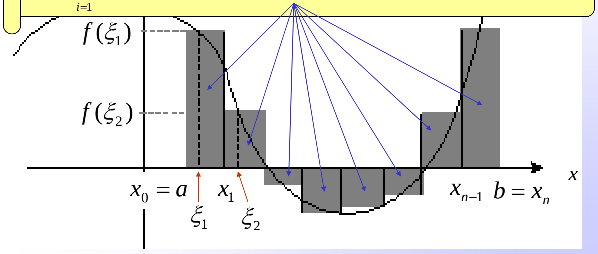
で表わし，aからbまでの**積分**または**定積分**という．

定積分の定義(3)



定積分の定義(4)

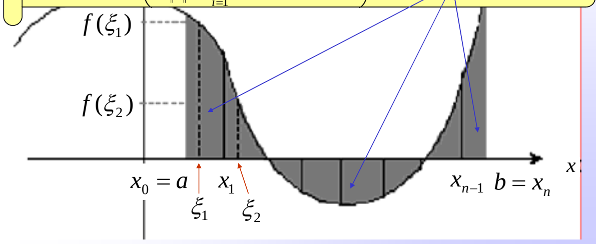
$$S_\Delta = S_\Delta(\{\xi_i\}) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$ は<u>これら</u>をたしたもの



定積分の定義(5)

従って，$\|\Delta\| \to 0$として，極限値 $\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ を考えると，

$\int_a^b f(x)dx \quad \left(= \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right)$ は，この面積となる



2007/06/28 情報学基礎C 7

定積分に関する注意

$\int_a^b f(x)dx$ は極限値を表わしてる1つの数であって，変数 x の関数というわけではない．従って，これを $\int_a^b f(t)dt$ と表わしても，$\int_a^b f(u)du$ と表わしてもさしつかえはない．

先ほどの定義では $a=b$や$a>b$の場合は含まれていないので，

$a=b$ のときは $\int_a^b f(x)dx = 0$

$a>b$ のときは $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

と定義する．

2007/06/28 情報学基礎C 8

積分可能性について

定理1：

$f(x)$が $[a,b]$で連続ならば，$[a,b]$で積分可能である．

定理2：

$f(x), g(x)$が積分可能ならば，以下のものも積分可能である．

$$f(x)+g(x),\quad \alpha f(x)\quad (\alpha \in \mathbf{R}),\quad f(x)\cdot g(x)$$

2007/06/28 情報学基礎C 9

定積分の基本性質

定理3：

$f(x), g(x)$ が $[a,b]$ で積分可能ならば，次の(1)〜(6)が成立する．

(1) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(2) $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \quad (\alpha \in \mathbf{R})$

(3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(4) $a < b,\ f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

(5) $a < b, m \le f(x) \le M \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

(6) $a < b \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

2007/06/28 情報学基礎C 10

微分積分学の基本定理

定理4：

$f(x)$ が $[a,b]$ で連続ならば，$\int_a^x f(t)dt$ は x について微分可能で，

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (a \le x \le b)$$

となる．すなわち，$\int_a^x f(t)dt$ は $f(x)$ の原始関数である．

この意味で，$\int_a^x f(t)dt$ を $f(x)$ の不定積分という．すなわち，

$$\int_a^x f(t)dt = \int f(x)dx$$

2007/06/28 情報学基礎C 11

定積分の計算原理

定理5：

閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ の一つの原始関数を $F(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

である．

$F(b)-F(a)$ を $[F(x)]_a^b$ や $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$ で表わすことが多い．
この記法によれば，

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

2007/06/28 情報学基礎C 12

定積分の計算例(1)

$$\int_0^1 (2x-3)dx$$

$$\int_0^1 (2x-3)dx = [x^2-3x]_0^1 = (1-3)-(0-0) = -2$$

定積分の計算は原始関数を求め，積分範囲の端点を代入し，その差を求めればよい

定積分の計算例(2)

$$\int_0^1 e^{ax}dx \quad (a \neq 0),\ \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$$

$$\int_0^1 e^{ax}dx = [\frac{1}{a}e^{ax}]_0^1 = \frac{1}{a}e^a - \frac{1}{a}e^0 = \frac{1}{a}(e^a-1)$$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}[\log(1+x^2)]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(\log 2 - \log 1) = \frac{1}{2}\log 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x (\sin x)' dx = [\frac{1}{3}\sin^3 x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}(\sin^3 \frac{\pi}{2} - \sin^3 0) = \frac{1}{3}$$