不定積分 (2)

主要関数の導関数の公式[復習]

◆多項式

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (ax^n)' = anx^{n-1} \quad (ax)' = a \quad (a)' = 0 \qquad a, n \in \mathbf{R}$$

◆三角関数

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

◆逆三角関数

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

◆指数関数と対数関数

$$(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \log a \quad (\log x)' = \frac{1}{x}$$

◆双曲線関数

$$(\sinh x)' = \cosh x \quad (\cosh x)' = \sinh x \quad (\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$$

主要な関数の不定積分[復習]

(1) $\displaystyle\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$ $(a \neq -1)$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$ $(x \neq 0)$

(3) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + c$

(4) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + c$

(5) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + c$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$ $(x \neq \pm 1)$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$

(8) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + c$ $(x \neq \pm 1)$

(9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c$ $(|x| < 1)$

(10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \log\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + c$ $(|x| < 1)$

置換積分法

定理1：

$x=\phi(t)$が微分可能ならば，

$$\int f(x)dx=\int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

証明：

$\int f(x)dx=F(x)$とすると，$F'(x)=f(x)$ である。
そこで $x=\phi(t)$とおき，$F(\phi(t))$ を考えると，

$$\frac{d}{dt}F(\phi(t))=\frac{dF(\phi(t))}{d\phi(t)}\cdot\frac{d\phi(t)}{dt}=F'(\phi(t))\phi'(t)=f(\phi(t))\phi'(t)$$

となる．よって，

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt=F(\phi(t))=F(x)=\int f(x)dx$$

2007/06/21　情報学基礎C　4

置換積分法の利用の仕方

$\int f(x)dx$ において，$x=\phi(t)$ と置く．

両辺微分して，$\dfrac{dx}{dt}=\phi'(t)$．従って，$dx=\phi'(t)dt$

従って，$$\int f(x)dx=\int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

あとは，計算する

2007/06/21　情報学基礎C　5

置換積分法の利用例(1)

$$\int\frac{2x+1}{x^2+x}dx$$

解：このままの形では，主要な関数の不定積分の公式のどれも使えない．そこで $t=x^2+x$ と置く．

両辺を x で微分して，$\dfrac{dt}{dx}=(2x+1)$ すなわち，$dt=(2x+1)dx$

これを用いて元の不定積分を書き直すと，

$$\int\frac{2x+1}{x^2+x}dx=\int\frac{1}{x^2+x}(2x+1)dx=\int\frac{dt}{t}$$

よって，

$$\int\frac{2x+1}{x^2+x}dx=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+c=\log|x^2+x|+c$$

2007/06/21　情報学基礎C　6

置換積分法の利用例(2)

一般に，以下が成り立つ

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{1}{f(x)}df(x) = \log|f(x)| + c$$

これを利用すると，例えば，

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx$$

$$= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}d(\cos x) = -\log|\cos x| + c$$

置換積分法の利用例(3)

$$\int x^2\sqrt{x+1}dx$$

$t = x+1$ と置くと，$dt = dx$ で，$x = t-1$

$$\int x^2\sqrt{x+1}dx = \int (t-1)^2\sqrt{t}dt = \int (t^2-2t+1)t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= \int (t^{\frac{5}{2}} - 2t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}})dt = \frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

置換積分法の利用例(4)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$$

$t = x^2 - 4$ と置くと，$dt = 2xdx$ で，

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}2xdx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + c = t^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{x^2-4} + c$$

部分積分法

定理2：

$f(x), g(x)$ が微分可能であるとき，次式が成り立つ．

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$$

証明：

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx\} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

$$= f(x)g'(x)$$

これより，$f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ は $f(x)g'(x)$ の不定積分となる．

部分積分法の利用例(1)

$$\int \log x dx$$

$$\int \log x dx = \int 1 \cdot \log x dx = \int (x)' \log x dx$$

$$= x\log x - \int x(\log x)' dx$$

$$= x\log x - \int x \frac{1}{x} dx$$

$$= x\log x - \int dx$$

$$= x\log x - x + c$$

$$= x(\log x - 1) + c$$

ここには，1が隠れていて，しかも，1は $(x)'$ であると思うところがポイント

部分積分法の利用例(2)

e^{-x} は $(-e^{-x})'$ であると思うところがポイント

$$\int xe^{-x}dx$$

$$\int xe^{-x}dx = \int x(-e^{-x})'dx = x(-e^{-x}) - \int (x)'(-e^{-x})dx$$

$$= -xe^{-x} - \int (-e^{-x})dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$$

ここで，$t = -x$ と置くと，$dt = -dx$

よって，

$$\int e^{-x}dx = -\int e^{-x}(-1)dx = -\int e^{t}dt = -e^{t} + c = -e^{-x} + c$$

従って，$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$

部分積分法の利用例(3)

$$\int \sin^{-1} x dx$$

部分積分を使って，

$$\int \sin^{-1} x dx = x \sin^{-1} x - \int x (\sin^{-1} x)' dx$$

$$= x \sin^{-1} x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ここで，$t = 1 - x^2$ と置くと，$dt = -2x dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-2x) dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$= -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -t^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$$

従って，$\int \sin^{-1} x dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$