原始関数、不定積分

原始関数(primitive function)

◆ある区間で定義されている関数 $f(x)$ に対して，この区間のすべての x において，

$$F'(x) = f(x)$$

が成り立つような関数 $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という．

◆$f(x)$の原始関数を求めることを，$f(x)$を**積分する**(integrate)という．

◆例：$f(x) = x^2$のとき，$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ なので，$F(x) = \frac{x^3}{3}$

◆積分することは微分することの逆演算であるが，原始関数が存在しないような$f(x)$もあるので注意が必要である

原始関数の一般形

定理1：

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の1つとすると，$F(x)+c$ （cは定数）も $f(x)$ の原始関数である．
また，$f(x)$ の任意の原始関数は $F(x)+c$ （cは定数）の形に表わせる．
この定数c を**積分定数**または**任意定数**という．

例:

$\frac{x^3}{3}$だけではないことに注意

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 \qquad \left(\frac{x^3}{3}+1\right)' = x^2 \qquad \left(\frac{x^3}{3}+c\right)' = x^2$$

x^2の原始関数は $\frac{x^3}{3}+c$ （cは積分定数）

不定積分

$f(x)$の原始関数の一般形 $F(x)+c$ を $f(x)$の<u>不定積分</u>(indefinite integral)といい，

$$\int f(x)dx$$

即ち，これは原始関数の一般形を表す単なる記号

で表す．すなわち，

$$\int f(x)dx = F(x)+c \quad (c:\text{積分定数}),\quad F'(x)=f(x)$$

しかし，(c は積分定数) と毎回書くのは面倒なので，混乱しないときには，

$$\int f(x)dx = F(x)$$

と略して書く．また，

$\int \frac{1}{f(x)}dx,\ \int 1dx$ などを，$\int \frac{dx}{f(x)},\ \int dx$ のように表わす

主要な関数の不定積分

(1) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}+c \quad (a \neq -1)$

(2) $\int \frac{1}{x}dx = \log|x|+c \quad (x \neq 0)$

(3) $\int e^x dx = e^x + c$

(4) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

(5) $\int \cos x dx = \sin x + c$

(6) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c \quad (x \neq \pm 1)$

(7) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$

(8) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + c \quad (x \neq \pm 1)$

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + c \quad (|x|<1)$

(10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + c \quad (|x|<1)$

不定積分の線形性

定理2：関数 $f(x), g(x)$ と定数 α に対して，次式が成り立つ．

(1) $\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

(2) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$

証明：(1)

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right) = \frac{d}{dx}\int f(x)dx \pm \frac{d}{dx}\int g(x)dx = f(x) \pm g(x)$$

これより，$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ は $f(x) \pm g(x)$ の不定積分である．

不定積分の計算例(1)

$$\int(3\sin x + x^2)dx$$

$$\int\{f(x)\pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int(3\sin x + x^2)dx = \int 3\sin x dx + \int x^2 dx$$

$$= 3\int \sin x dx + \int x^2 dx = -3\cos x + \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \qquad \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$$

不定積分の計算例(2)

$$\int(4x^5 + \frac{3}{x^3})dx$$

$$\int(4x^5 + \frac{3}{x^3})dx = \int(4x^5 + 3x^{-3})dx$$

$$= 4\int x^5 dx + 3\int x^{-3} dx = 4\frac{x^6}{6} + 3\frac{x^{-2}}{-2} + c$$

$$= \frac{2}{3}x^6 - \frac{3}{2}x^{-2} + c$$

不定積分の計算例(3)

$$\int(t^3 + \frac{1}{t^2+1})dt$$

$$\int(t^3 + \frac{1}{t^2+1})dt = \int t^3 dt + \int \frac{1}{t^2+1}dt$$

$$= \frac{t^4}{4} + \tan^{-1} t + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$$