情報学基礎C

写像(1)

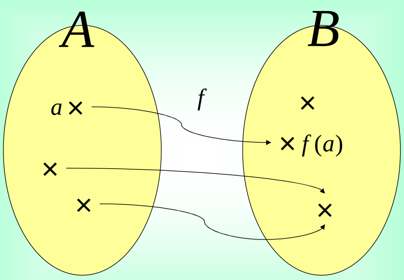
◆2つの集合A、Bにおいて、Aの各元（要素）に対してBのある1つの元が対応しているとき、このような対応を集合Aから集合Bへの**写像**といって、$f: A \to B$ または $A \xrightarrow{f} B$ で表す

map

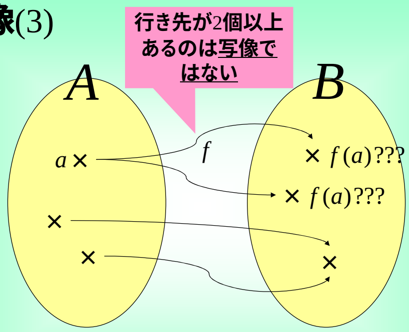
◆このとき、写像 f でAの元 a に対応するBの元を、写像 f による a の像といって、$f(a)$ で表す。

$$\begin{array}{ccc} f: A & \to & B \\ \Psi & & \Psi \\ a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

写像(2)



写像(3)



写像(4)

◆写像の例

1)実数 x に x^2+1 を対応させれば $\mathbf{R}$ から$\mathbf{R}$への1つの写像が得られる。この写像を f と書けばすべの $x \in \mathbf{R}$ に対して、$f(x) = x^2+1$

2)自然数 n に$2n+1$を対応させれば、$\mathbf{N}$ から$\mathbf{N}$ への写像が得られる。この写像を a と書けばすべての $n \in \mathbf{N}$ に対して、$a_n = 2n+1$となる。これは数列として有名

◆写像でない例

1)実数 x に $x^2+y^2=1$なる実数 y を対応させても、そのような実数は正のものと負のものの2つあり、行き先がユニークに定まらないので、写像ではない

写像の定義域と値域(1)

domain

◆A、Bを集合、fをAからBへの写像 $f: A \to B$ とするとき、集合Aを写像 f の**定義域**といい、写像 f によるAの元の像全体の集合を、f によるAの**像**、または、f の**値域**といって$\mathrm{Image}(f)$や $f(A)$で表す。

image

$$\mathrm{Image}(f) = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

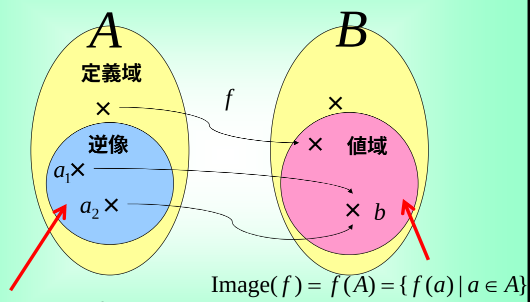
range

◆またこのとき、Bの元 b に対して、b を像とするAの元全体の集合を b の**逆像**または原像といって$f^{-1}(b)$ で表す。

inverse image

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

写像の定義域と値域(2)



$f^{-1}(b)=\{a\in A \mid f(a)=b\}$

$\mathrm{Image}(f)=f(A)=\{f(a)\mid a\in A\}$

写像の定義域と値域(3)

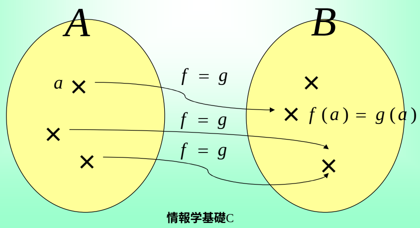
- $^{\forall}x(\neq 0)\in \mathbf{R}$ に対して $f(x)=\dfrac{1}{x}$ とすると、定義域は $\mathbf{R}-\{0\}$、値域は $\mathbf{R}-\{0\}$ 修正
- $x\in\mathbf{R}, x\geq 1$ に対して $f(x)=\sqrt{x-1}$ とすると、定義域は区間 $[1,\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}, x\geq 1\}$ 、値域は $\mathbf{R}^{+}=\{x\mid x\in\mathbf{R}, x\geq 0\}$

写像が等しいとは

- A、Bを集合、f, g をAからBへの写像とするとき、

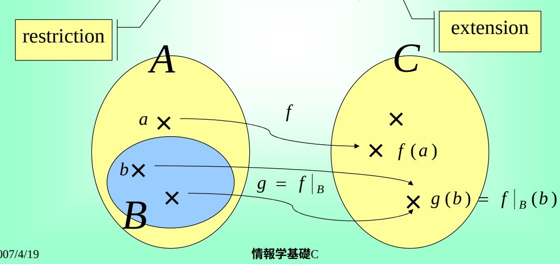
「すべての $a\in A$ に対して $f(a)=g(a)$ が成り立つ」

ならば、2つの写像 f と g は等しいといって $f=g$ と書く



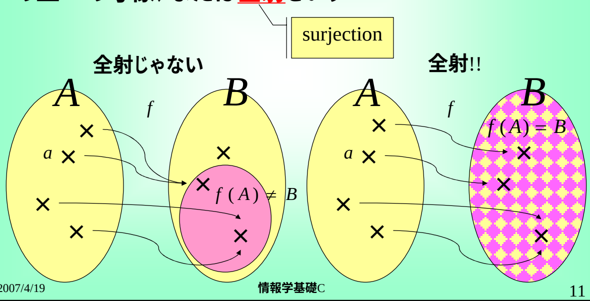
写像の拡張と制限

- 2つの写像 f, g において、f の定義域Aが g の定義域Bを含み、かつすべての $b\in B$ に対して $f(b)=g(b)$ が成り立つならば、f をg の (Aへの) **拡張**、g を f の (Bへの) 縮小、または**制限**といい、$g=f|_B$ と書く



全射と単射(1)

- 写像 $f:A\to B$ において、Aの像 $f(A)$ は一般にはBの部分集合であるが、特に $f(A)=B$ のとき、f は AからBへの上への写像、または**全射**という



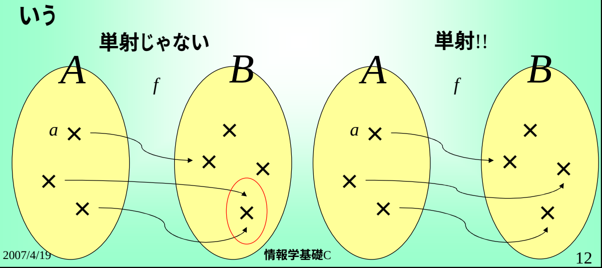
全射と単射(2)

- また、Aの任意の2元 a, b に対して、

$$a\neq b \Rightarrow f(a)\neq f(b)$$

injection

であるとき、f は AからBへの1対1の写像、または**単射**という



全射と単射(3)

◆全射であると同時に単射であるような写像を**全単射**という

bijection

◆全単射 $f : A \to B$ があるとき、Bの任意の元bに対してその逆像 $f^{-1}(b)$は、ただ1つの元からなるから、元 $b \in B$ にその逆像 $f^{-1}(b)$を対応させることによってBからAへの写像が得られる。この写像も全単射であって f の**逆写像**といい、f^{-1}で表す

inverse map

全射と単射(4)

◆集合 Aが集合 Bの部分集合であるとき、Aの任意の元 a に対して、a を Bの元とも見て $a \in A$に $a \in B$を対応させる写像

$$1_{A,B} : A \to B$$

は明らかに単射である。この写像 $1_{A,B}$ を集合 Aから集合 Bへの標準的単射あるいは包含写像という

◆特に、集合 Aから集合 Aへの標準的単射は全単射となり、この全単射を Aの恒等写像といって 1_A で表す

全射と単射(5)

◆ f_1 〜 f_5 を以下の式で定義された **R** から **R** への写像とする。それぞれ、全射、単射、全単射の別を考えよ。

$$f_1(x) = x + 1$$
$$f_2(x) = x^3$$
$$f_3(x) = x^3 - x$$
$$f_4(x) = e^x$$
$$f_5(x) = x^2$$

合成写像(1)

◆2つの写像 $f : A \to B$、$g : B \to C$ に対して、Aの元 a に Cの元 $g(f(a))$を対応させれば、この対応によって AからCへの写像が得られる。この写像を $g \circ f$ と書いて、fと g の**合成写像**という

◆全単射 $f : A \to B$ とその逆写像 f^{-1}に対して、合成写像 $f^{-1} \circ f$ および $f \circ f^{-1}$ はいずれもそれぞれ Aおよび Bの恒等写像となる

$$f^{-1} \circ f = 1_A,\ f \circ f^{-1} = 1_B$$

合成写像(2)