2変数の２次関数
偏微分
ヤコビ行列

2017/06/13

２変数の２次関数

- 独立変数が２個である
- $z = f(x, y)$
- 一般ではn独立変数の多変数関数もある
- $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- 例えば、
- $z = x^2 + 2xy + 3y^2$
- $z = \sin(x - 2y)$
- $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

偏微分

- 偏微分（へんびぶん、partial derivative）は、多変数関数に対して一つの変数のみに関する（それ以外の変数は定数として固定する微分である
- $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, f'_x, d_x\, f,$
- $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, f'_y, d_y\, f,$

- $f(x, y)$の極値を求めるときは、偏微分を用いる解法
- $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0, x, y$の値を求める。もとの関数に代入して極値が得る。

問題

- 次の関数を偏微分せよ。
- $z = x^2 + 2xy + 3y^2$
- $z = \sin(x - 2y)$
- $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

- $z = x^3y^2 + 3xy - 4y^3$
- $z = \log(2x^2 + 3y^2)$
- $z = x^y$

次の関数の最大値,最小値を求めよ

$P(x,y)=x^2+2y^2-2xy+2y+2\ (0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1)$

$z = f(x, y)$の最小値を求めよ

- $z = f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x + 4y - 1$

ヤコビ行列

- 多変数微分積分学およびベクトル解析におけるヤコビ行列あるいは単にヤコビアン一変数スカラー値関数における接線の傾きおよび一変数ベクトル値函数の勾配の、多変数ベクトル値関数に対する拡張、高次元化である。

ヤコビ行列

～状況設定～

- $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^\top$ を決めると $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^\top$ が定まる状況（n 変数関数が m 個あると考えてもよい，n 変数の m 次元ベクトル値関数と考えてもよい）
- 各 y_i は x_j で偏微分可能

～ヤコビ行列の定義～

$\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$ を ij 成分とする $m \times n$ 行列 J をヤコビ行列と言います。

例えば $i = j = 2$ のとき，ヤコビ行列は $J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$ です。

～ヤコビアンの定義～

ヤコビ行列の行列式をヤコビ行列式，またはヤコビアンと言います。ヤコビアンは変換の「拡大率」を表す重要な量です。