ベイズの定理とベイズ推定

秋元 泰介（T. A.）
知能システム演習A　2013年10月7日（月）

1. ベイズ推定

- 「結果から原因を求める推定方法」
- 「ある結果のときにある原因である確率が最も大きいような原因を選ぶ」

「発熱の原因」を確率的に推定する場合：

P(風邪|発熱) = ?
P(コレラ|発熱) = ?
P(赤痢|発熱) = ?

事前に分かっている確率
P(発熱|風邪) = 0.8
P(発熱|コレラ) = 0.7
P(発熱|赤痢) = 0.9

発熱したときに｛風邪／コレラ／赤痢｝である確率。
この確率が大きいものが原因と推定出来る。

2. ベイズの定理

ベイズの定理

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$ （式1.7, p.22）

ベイズの定理（簡略版）

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$ （式1.6, p.22）

「Aが起きた時にBが起きる確率」＝ 「Bが起きた時にAが起きる確率」×「Bが起きる確率」 / 「事象Aが起きる確率」

3. ベイズの定理の導出（1）

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$ （式1.1, p.21）

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ （式1.2, p.21）

⇩

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$ （式1.3,1.4,1.5をまとめたもの, p.21）

⇩

ベイズの定理（簡略版）

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$ （式1.6, p.22）

3. ベイズの定理の導出（2）

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

テキストの誤り：
p.22上からふたつ目の式：
P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)

※B_1,B_2 … B_n = Aを引き起こす全ての原因の集合
nが無限個の場合も定理が成り立つ。
（発熱の全ての原因は？）

ベイズの定理

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$ （式1.7, p.22）

4. ベイズ推定～例題～

A = 発熱する
B_1 = 風邪になる
B_2 = コレラになる
B_3 = 赤痢になる

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

分子の大小により比較
（「発熱」の確率=P(A)が分からなくても推定可）

P(B_1) = 0.1
P(B_2) = 0.01
P(B_3) = 0.01
P(A|B_1) = 0.8
P(A|B_2) = 0.7
P(A|B_3) = 0.9

P(B_1|A) = P(A|B_1) P(B_1)/ P(A)= 0.08/ P(A)
P(B_2|A) = P(A|B_2) P(B_2) / P(A)= 0.007/ P(A)
P(B_3|A) = P(A|B_3) P(B_3) / P(A)= 0.009/ P(A)

「Biのときに Aが起きる確率」×「Biが起きる確率」