「同時分布」

作成：秋元（TA）

知能システム演習A、2013年10月21日（月）

＜使用する文献＞

ウィキペディア. 同時分布. <http://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%90%8C%E6%99%82%E5%88%86%E5%B8%83> (最終アクセス日：2013.10.19).

立花俊一・田川正賢・成田清正 (1996).『エクササイズ 確率・統計』. 共立出版. (pp. 42-47)

例題 2.2 ——(確率変数の独立性)

箱の中に右の表のように数字 1，2，3 をつけた同じ大きさの球が 9 個入っている．よくかきまぜて 1 球とり出すことを続けて 2 回くり返す．第 1 球の数字を X，第 2 球の数字を Y とする．第 1 球をもとに戻して第 2 球をとり出す復元抽出の場合について，

数　字	1	2	3	計
個　数	4	3	2	9

(1)　X，Y の同時分布表をつくれ．

(2)　X，Y の独立性を調べよ．

【解答】

(1)　復元抽出の場合には，2 回目に球をとり出すときの箱の中味は 1 回目に球をとり出すときと同じである．

$p(i, j)=P(X=i,\ Y=j)$　$(i, j=1, 2, 3)$ を i 行 j 列目において同時分布表が得られる．

(2)　X，Y の周辺分布を

$f(i)=P(X=i)$，$g(j)=P(Y=j)$

とおく．

すべての i，$j=1$，2，3 に対して，

$$p(i, j)=f(i)\,g(j)$$

となっているから，X，Y は独立である．

X \ Y	1	2	3	計
1	$\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{9}$	$\frac{3}{9}\cdot\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$
3	$\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
計	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	1

問 2　上の例題 2.2 において，第 1 球をもとに戻さずに第 2 球をとり出す非復元抽出の場合について，

(1)　X，Y の同時分布表をつくれ。　　(2)　X，Y の独立性を調べよ。

【解答】

【解答】

(1)　2回目に球をとり出すときの箱の中味は1回目に球をとり出すときと異なっている．$p(i, j)=P(X=i)P(Y=j|X=i)$　を計算して表に配置せよ．

(2)　たとえば，　$p(1, 1) \neq f(1)g(1)$ となり，X，Y は独立ではない．

$$\left(p(1, 1)=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8},\quad f(1)=\frac{4}{9},\quad g(1)=\frac{4}{9}\right)$$

問　題

1　離散型確率変数 X, Y が独立ならば, X と Y の和 $Z=X+Y$ の確率分布は，基本事項(1) [p.4[illegible]布の記号を用い[illegible]に与えられる。

$$P(Z=z)=\sum{}' p(x_i,\ y_j) \text{[illegible]} g(z-x_i)$$

ここに，$\sum{}'$ は $x_i+y_j=$[illegible]ての総和を表す。このことを用いて，II章 §[illegible] [p.39] の X, Y [illegible]和 $Z=X+Y$ の確率分布表をつくれ。

2　1枚の硬貨を3回投げるとき，表の出る回数を X，表か裏が続いて出ている限り，これを1続きと考え，続きの数を Y とする。

(1)　X, Y の同時分布表をつくれ。

(2)　X, Y の周辺分布を求めよ。

(3)　X, Y の独立性を調べよ。

3　X, Y の同時密度関数 $p(x,\ y)$ が次のように与えられているとき，X, Y の独立性を調べよ。

(1)　$p(x,\ y)=\begin{cases} 2(1-x) & (0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

(2)　$p(x,\ y)=\begin{cases} 3x & (0 \leqq y \leqq x \leqq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

2　(1)　(2)　右の表を参照せよ．

X \ Y	1	2	3	計
0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
1	0	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
2	0	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
計	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	1

(3)　たとえば，

$$P(X=3,\ Y=3)$$

$$\neq P(X=3)\,P(Y=3)$$

となり，

X，Y は独立でない．

［§1例題1.1 解答の表，p.37参照］

3　(1)　任意の x，y に対して，$p(x, y)=f(x)g(y)$ となるから，独立．

$$0\leqq x\leqq 1 \Longrightarrow f(x)=\int_0^1 p(x,\ y)\,dy=2(1-x)$$

$$0\leqq y\leqq 1 \Longrightarrow g(y)=\int_0^1 p(x,\ y)\,dx=1$$

(2)　$p(x, y)\neq f(x)g(y)$ となるから，独立ではない．

$$0\leqq x\leqq 1 \Longrightarrow f(x)=\int_0^x p(x,\ y)\,dy=3x^2$$

$$0\leqq y\leqq 1 \Longrightarrow g(y)=\int_y^1 p(x,\ y)\,dx=\frac{3}{2}(1-y^2)$$