

第 10 章 確認問題

1. 以下の問いに答えよ。

(1) $0 < x < 1$ のとき, $n > 2$ なる n に対して,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} < 1 \text{ であることを示せ.}$$

(2) $n > 2$ なる n に対して, $\log(1+\sqrt{2}) < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} dx < 1$ であることを示せ.

2. Γ 関数 $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt$ ($p > 0$) と, Beta 関数 $B(p, q) = \int_0^1 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt$

($p, q > 0$)の間には, 次の基本関係式が成り立つことが知られている.

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (\text{基本関係式})$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) Beta 関数において, $t = \sin^2 \theta$ とするき, $B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta$

となることを示せ.

(2) $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ の値を求めよ.

(3) 基本関係式を用い $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ の値を求めよ.

(4) ガウス積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ の値を求めよ.