第１０章
重積分

重積分の定義(1)

2次元空間(平面)内の有界閉区間(長方形) $J: a \le x \le b$, $c \le y \le d$における有界関数$f(x,y)$を考える.
Jの分割

$$\Delta: \begin{cases} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_m = b \\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{j-1} < y_j < \cdots < y_n = d \end{cases}$$

に対して，小区間$J_{i,j}: x_{i-1} \le x \le x_i, y_{j-1} \le y \le y_j$の対角線の長さを考え，それらの最大値を$\|\Delta\|$で表し，分割$\Delta$のノルムという.
すなわち，

$$\|\Delta\| = \max_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$$

である.

重積分の定義(2)

各小区間$J_{i,j}$から1点$(\xi_{i,j}, \eta_{i,j})$をとる．点$(\xi_{i,j}, \eta_{i,j})$の$J_{i,j}$からの取り方がどうであっても，一定の極限値

$$S = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_{i,j}, \eta_{i,j})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

が存在するとき，$f(x,y)$はJで2重積分可能であるという．また，Sを

$$\iint_J f(x,y)dxdy$$

で表わし，$f(x,y)$のJにおける2重積分という.

重積分の定義(3)

次にDを一般の有界集合とし，D上の有界関数$f(x,y)$を考える.
Dを覆う有界閉区間 J をとり，

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

と定義することで，$f(x,y)$の定義域DをJ まで拡張した有界関数$f^*(x,y)$を得る.
$f^*(x,y)$が有界閉区間 J において2重積分可能ならば，
$f(x,y)$はDで2重積分可能であるといい，$f(x,y)$のDにおける2重積分を，

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_J f^*(x,y)dxdy$$

によって定義する．このとき，Dを積分域という.
この2重積分に対し，これまで扱ってきた積分を単積分という.

累次積分

$f(x,y)$が区間，$J: a \le x \le b$, $c \le y \le d$で定義されているとき，yを固定すると$f(x,y)$は$a \le x \le b$におけるxの関数となるから，それが積分可能ならば，$\int_a^b f(x,y)dx$ が考えられる.
そこでyを変動させてみると$\int_a^b f(x,y)dx$の値はyとともに変わるから，$c \le y \le d$におけるyの関数と見れる.
これがyの関数として積分可能ならば，$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$ が考えられる．この積分は，$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$ で表すことが多い.

同様に，$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$ が考えられる.
この積分は，$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$ で表すことが多い.

このように単積分を繰り返した形の積分を累次積分という.

2重積分の累次積分化

Theorem
(1)$f(x,y)$が連続曲線$x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$ (あるいは，それと直線 $y = c$, $y = d$)によって囲まれた有界閉領域Dで連続ならば

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$$

(2)$f(x,y)$が連続曲線$y = \phi_1(x)$, $y = \phi_2(x)$ (あるいは，それと直線 $x = a$, $x = b$)によって囲まれた有界閉領域Dで連続ならば

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy$$

重積分の変数変換

Theorem
$f(x,y)$が有界閉領域Dで連続で，
$\varphi(u,v), \phi(u,v)$が有界閉領域Eで連続な偏導関数をもち，変換

$$x=\varphi(u,v), \qquad y=\phi(u,v)$$

によりDの点(x,y)がEの点(u,v)に対応し，Eの内点で，

$$Jacobian\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

ならば，

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f\big(\varphi(u,v), \phi(u,v)\big) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

重積分の変数変換

Corollary
変換が特に，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$の場合は，

$$Jacobian\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \neq 0$$

となる．従って，

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, drd\theta$$

Gamma関数とBeta関数の関係について

$f_p(x)=2x^{2p-1}e^{-x^2}\ (p>0), f_q(y)=2y^{2q-1}e^{-y^2}\ (q>0)$とおく．

$t=x^2$と変換することにより，$dt=2xdx$となり，

$$\int_0^\infty f_p(x)dx = \lim_{\eta\to\infty}\int_0^\eta f_p(x)dx = \lim_{\eta\to\infty}\int_0^\eta 2x^{2p-1}e^{-x^2}dx$$

$$= \lim_{\eta\to\infty}\int_0^\eta x^{2p-2}e^{-x^2}2xdx = \lim_{\eta\to\infty}\int_0^\eta (x^2)^{p-1}e^{-x^2}2xdx$$

$$= \lim_{\eta\to\infty}\int_0^{\eta^2} t^{p-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt = \Gamma(p)$$

以降，

$$\int_0^\infty f_p(x)dx = \Gamma(p)$$

Gamma関数とBeta関数の関係について

平面の第1象限の部分をDとすると，

$$\iint_D f_p(x)f_q(y)dxdy = \lim_{\eta\to\infty}\iint_{\binom{0\le x\le\eta}{0\le y\le\eta}} f_p(x)f_q(y)dxdy$$

$$= \lim_{\eta\to\infty}\int_0^\eta f_p(x)dx\int_0^\eta f_q(y)dx = \int_0^\infty f_p(x)dx\int_0^\infty f_q(y)dx$$

$$= \Gamma(p)\Gamma(q)$$

Gamma関数とBeta関数の関係について

一方，極座標変換を行って計算すると，

$$\iint_D f_p(x)f_q(y)dxdy = \lim_{\eta\to\infty}\iint_{\binom{0\le\sqrt{x^2+y^2}\le\eta}{0\le x,\,0\le y}} f_p(x)f_q(y)dxdy$$

$$= \lim_{\eta\to\infty}\iint_{\binom{0\le\sqrt{x^2+y^2}\le\eta}{0\le x,\,0\le y}} 2x^{2p-1}e^{-x^2}\cdot 2y^{2q-1}e^{-y^2}dxdy$$

極座標変換
$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$

$$= \lim_{\eta\to\infty}\iint_{\binom{0\le r\le\eta}{0\le\theta\le\pi/2}} 2r^{2p-1}\cos^{2p-1}\theta\, e^{-r^2\cos^2\theta}2r^{2q-1}\sin^{2q-1}\theta\, e^{-r^2\sin^2\theta}rdrd\theta$$

$$= \lim_{\eta\to\infty}\iint_{\binom{0\le r\le\eta}{0\le\theta\le\pi/2}} 4r^{2(p+q)-2}\cos^{2p-1}\theta\ \sin^{2q-1}\theta\, e^{-r^2}rdrd\theta$$

$$= \int_0^\infty 2r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta$$

Gamma関数とBeta関数の関係について

ここで，前式第1項の積分は，

$f_p(x)=2x^{2p-1}e^{-x^2}\ (p>0)$

$$\int_0^\infty 2r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr = \int_0^\infty f_{p+q}(r)dr = \Gamma(p+q)$$

前式第2項の積分は，$t=\sin^2\theta$と変換すると，
$dt=2\sin\theta\cos\theta d\theta$となり，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-2}\theta\sin^{2q-2}\theta 2\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta)^{p-1}(\sin^2\theta)^{q-1}2\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)^{p-1}(\sin^2\theta)^{q-1}2\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$= \int_0^1 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt = B(p,q)$$

$\int_0^1(1-t)^{p-1}t^{q-1}dt$はBeta関数と呼ばれ$B(p,q)$で表される．即ち、

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt$$

Gamma関数とBeta関数の関係について

以上，まとめると，

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-t}dt=\int_0^{\infty} 2x^{2p-1}e^{-x^2}dx \quad (p>0)$$

$$B(p,q)=\int_0^1 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta \ \ (p,q>0)$$

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)\,B(p,q)$$

従って，

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=\Gamma(1)B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty} e^{-t}dt\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2d\theta=1\cdot\pi=\pi$$

このことから，ガウス積分の値も分かる．

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}}$$

ガウス積分

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}}$$