第９章
広義積分

広義積分(   )

今まで，有界閉区間$[a,b]$上の有界関数$f(x)$の積分ばかりを扱ってきた.
ここでは，積分の概念を拡張し，次のｉ)，ii)の場合の積分を考える.

ｉ）$f(x)$が$[a,b]$で有界でない場合
ii）$f(x)$が無限区間$[a,\infty),(-\infty,a],(-\infty,\infty)$上の関数の場合

例:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx, \int_a^{\infty} f(x)dx, \int_{-\infty}^{a} f(x)dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

広義積分の定義　（1）

$f(x)$が点 x_0の近傍で有界でないとき(点 x_0では,$f(x)$が定義されていなくても良い), x_0 を有界性に関する, 異常点または特異点という. 例えば, 点0は　$f(x)=\dfrac{1}{x}$ の特異点である.

$f(x)$が, b を特異点とし,$[a,b]$では積分可能でない場合に, $[a,b-\varepsilon]$　$(\varepsilon>0)$ では, 積分可能で,$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$が存在する($-\infty$, ∞も可)という状況ならば,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

と定義する.

広義積分の定義　(2)

同様に,

aが異常点の場合,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

a,bが異常点の場合,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \to 0} \int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)dx$$

$c(a<c<b)$が異常点の場合,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \right)$$

と定義する. このように定義された$\int_a^b f(x)dx$を$[a,b]$における$f(x)$の広義積分または異常積分という.

広義積分の定義　(1)

$f(x)$ が，$[a,\infty)$ の関数(有界とは限らない)で，任意の正数 η に対して，広義積分 $\int_a^{\eta} f(x)dx$ が存在し，さらに，

$$\lim_{\eta\to\infty}\int_a^{\eta} f(x)dx$$

が存在する($-\infty, \infty$ も可)ならば，

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{\eta\to\infty}\int_a^{\eta} f(x)dx$$

と定義する.

広義積分の定義　(2)

同様に,

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{\eta\to\infty}\int_{-\eta}^{a} f(x)dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\eta_1,\eta_2\to\infty}\int_{-\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx$$

と定義する. このように定義された

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx, \int_{-\infty}^{a} f(x)dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

を $[a,\infty),(-\infty,a],(-\infty,\infty)$ における $f(x)$ の<u>広義積分</u>または<u>無限積分</u>という.

広義積分の計算例(1)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx \quad (\alpha > 0)$$

---

0 が異常点なので,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\log x\right]_\varepsilon^1 & (\alpha = 1) \\ \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_\varepsilon^1 & (\alpha \neq 1) \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}(\log 1 - \log\varepsilon) = \infty & (\alpha = 1) \\ \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{-\alpha+1} - \frac{\varepsilon^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & (\alpha < 1) \\ \infty & (\alpha > 1) \end{cases} \end{cases}$$

広義積分の計算例(2)

$$\int_0^1 \log x dx$$

---

0 が異常点なので,

$$\int_0^1 \log x dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \log x dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[x(\log x - 1) \right]_\varepsilon^1$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(1 \cdot (\log 1 - 1) - \varepsilon (\log \varepsilon - 1) \right) = -1$$

$$\int \log x dx = x(\log x - 1) + c$$

部分積分

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} (-\varepsilon) = 0$$

ロピタルの定理

広義積分の計算例(3)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx \quad (\alpha > 0)$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\eta\to\infty}\int_1^\eta \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \lim_{\eta\to\infty}\int_1^\eta \frac{1}{x}dx = \lim_{\eta\to\infty}\left[\log x\right]_1^\eta & (\alpha = 1) \\ \lim_{\eta\to\infty}\int_1^\eta \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\eta\to\infty}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^\eta & (\alpha \neq 1) \end{cases}$$

よって,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \lim_{\eta\to\infty}(\log\eta - \log 1) = \infty & (\alpha = 1) \\ \lim_{\eta\to\infty}\left(\frac{\eta^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}\right) = \begin{cases} \infty & (\alpha < 1) \\ \frac{-1}{1-\alpha} & (\alpha > 1) \end{cases} \end{cases}$$

広義積分の計算例(4)

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx$$

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx = \lim_{\eta\to\infty}\int_1^\eta \frac{\log x}{x^2}\,dx = \lim_{\eta\to\infty}\left[-\frac{1}{x}(\log x+1)\right]_1^\eta$$

$$= \lim_{\eta\to\infty}\left(-\frac{1}{\eta}(\log\eta+1)+1\cdot(\log 1+1)\right)=1$$

$$\int \frac{\log x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}(\log x+1)+c$$

部分積分

$$\lim_{\eta\to\infty}\frac{\log\eta}{\eta} = \lim_{\eta\to\infty}\frac{(\log\eta)'}{\eta'} = \lim_{\eta\to\infty}\frac{1}{\eta} = 0$$

ロピタルの定理

Γ 関数(1)

$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx \quad (p>0)$ によって定義される関数を,

Gamma関数という. Gamma関数は以下の性質を持つ！！

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p) \qquad (p>0)$$

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

特に, $\Gamma(1)=1$

Γ 関数(2)

$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad (p>0)$ について

$$\Gamma(p+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^p dx=\lim_{\eta\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\eta e^{-x}x^p dx$$

$$=\lim_{\eta\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\eta \left(-e^{-x}\right)' x^p dx$$

$$=\lim_{\eta\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left[-e^{-x}x^p\right]_\varepsilon^\eta+\int_\varepsilon^\eta e^{-x}\left(x^p\right)' dx\right)$$

$$=\lim_{\eta\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-e^{-\eta}\eta^p+e^{-\varepsilon}\varepsilon^p+\int_\varepsilon^\eta e^{-x}px^{p-1}dx\right)$$

$$=\lim_{\eta\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-e^{-\eta}\eta^p+e^{-\varepsilon}\varepsilon^p\right)+\lim_{\eta\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\eta e^{-x}px^{p-1}dx$$

$$=p\lim_{\eta\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\eta e^{-x}x^{p-1}dx=p\Gamma(p)$$

ロピタルの定理を使用

$$\lim_{\eta\to\infty} e^{-\eta}\eta^p=0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} e^{-\varepsilon}\varepsilon^p=0$$

Γ 関数(3)

$\Gamma(1)=1$ について

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{1-1}dx=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{0}dx=\int_0^{\infty} e^{-x}dx$$

$$=\lim_{\eta\to\infty}\int_0^{\eta} e^{-x}dx=\lim_{\eta\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^{\eta}=\lim_{\eta\to\infty}\left(-e^{-\eta}+e^{0}\right)\ =e^{0}=1$$

$\Gamma(n+1)=n!$ について

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$$

$$=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n(n-1)\cdots 1\Gamma(1)$$

$$=n!$$