第８章
定積分の応用

定積分と 面積

閉区間$[a,b]$で常に$g(x) \le f(x)$のとき，2 曲線$y = f(x)$, $y = g(x)$
および 2 直線$x = a, x = b$で囲まれた部分の面積をAとし定積分で表わしてみる.

まず$[a,b]$の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

をとり，各小区間$[x_{i-1}, x_i]$から任意の点ξ_iをとる. ここで底辺$x_i - x_{i-1}$,
高さ$f(\xi_i) - g(\xi_i)$の長方形を考え，その和を作ると

$$\sum_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i) - g(\xi_i) \right)(x_i - x_{i-1})$$

ここで分割Δを細かくすると，この和は

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

に収束し，面積を表わす.

積分による量の計算の原理

定理　実数で測られる量があり、その量またはその量をもつ図形などが、変数xの空間にわたって存在するとする。
この量の、小空間$[x, x+\Delta x]$に対応する部分ΔSについて、近似式

$$\Delta S \cong f(x)\Delta x \quad (\frac{\Delta S}{\Delta x} \cong f(x))$$

が成り立ち、かつこの近似式が$\Delta x \to 0$のとき限りなく正確になるとする。
ここで$f(x)$は$[a, b]$で連続な関数とする。
このとき、全部の量Sは

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

積分による量の計算の原理

（**説明**） 区間 $[a, b]$ を小区間に分割し，それを

$$\Delta:\quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

とする．さて各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ に対応する量を ΔS_i とすれば，近似式

$$\Delta S_i \fallingdotseq f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

が成り立つ．ΔS_i を全部加えれば和は S であり，したがって

$$S \fallingdotseq \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \qquad ①$$

ここで分割 Δ を細かくすると，近似式 ① の右辺は積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ に近づく．また ① は限りなく正確になる．よって定理の式が成り立つ． ◇

定積分による面積の計算例(1)

例：次の曲線で囲まれた図形の面積を求めてみよう

$$x = y^2, \qquad y = x - 2$$

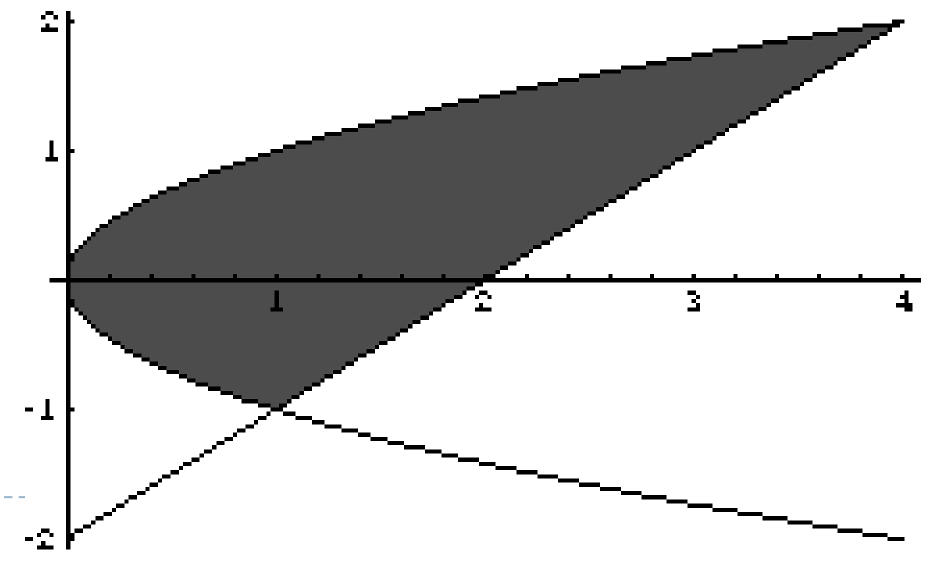
解：

この図で縦方向の長方形を考えると $x = y^2, y = x - 2$ の交点を通る直線 $x = 1$ より左側では，長方形の高さが $\sqrt{x} - (-\sqrt{x})$ となり，右側では $\sqrt{x} - (x-2)$ となる．よって，求める面積 A は

$$A = \int_0^1 2\sqrt{x}dx + \int_1^4 \left(\sqrt{x} - (x-2)\right)dx = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^4$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{3}{2}[4^{\frac{3}{2}} - 1] - \frac{1}{2}[4^2 - 1] + 2[4-1]$$

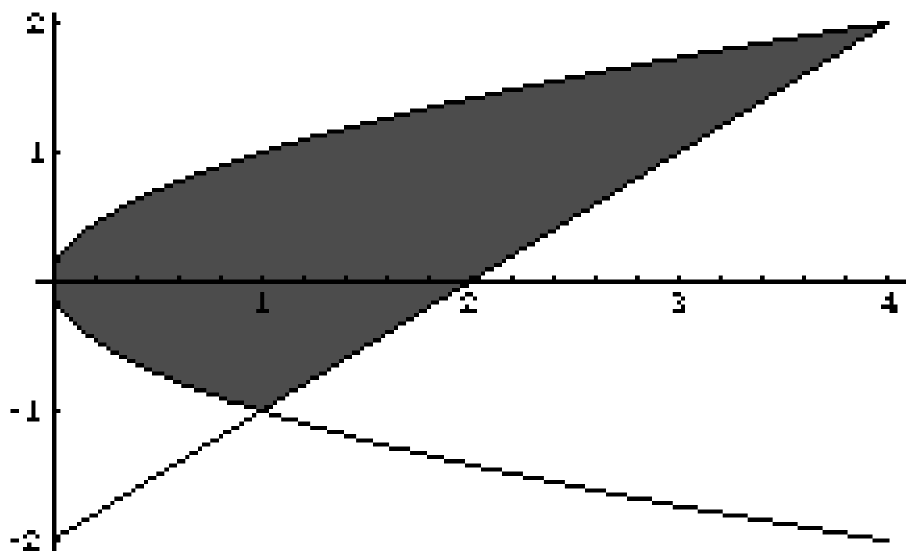
$$= \frac{4}{3} + \frac{14}{3} - \frac{15}{2} + 6 = \frac{9}{2}$$



定積分による面積の計算例(2)

次に，横方向の長方形を考えると，長方形の高さは求める図形内のすべての範囲で $y+2-y^2$ ，幅は Δy となり，計算が簡単になる．実際 $x=y^2, y=x-2$ の交点を求めると， $y^2=y+2$ より $y^2-y-2=(y+1)(y-2)=0$ ．よって $y=-1,2$ となる．これより求める面積 A は

$$A=\int_{-1}^{2}(y+2-y^2)dy=\left[\frac{y^2}{2}+2y-\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$



定積分と体積

x 軸に垂直な平面で切ったときの切り口の面積が $S(x)$ となるような空間図形を考える.
この空間図形の $a \le x \le b$ の部分の体積を定積分で表わしてみる.

まず $[a,b]$ の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

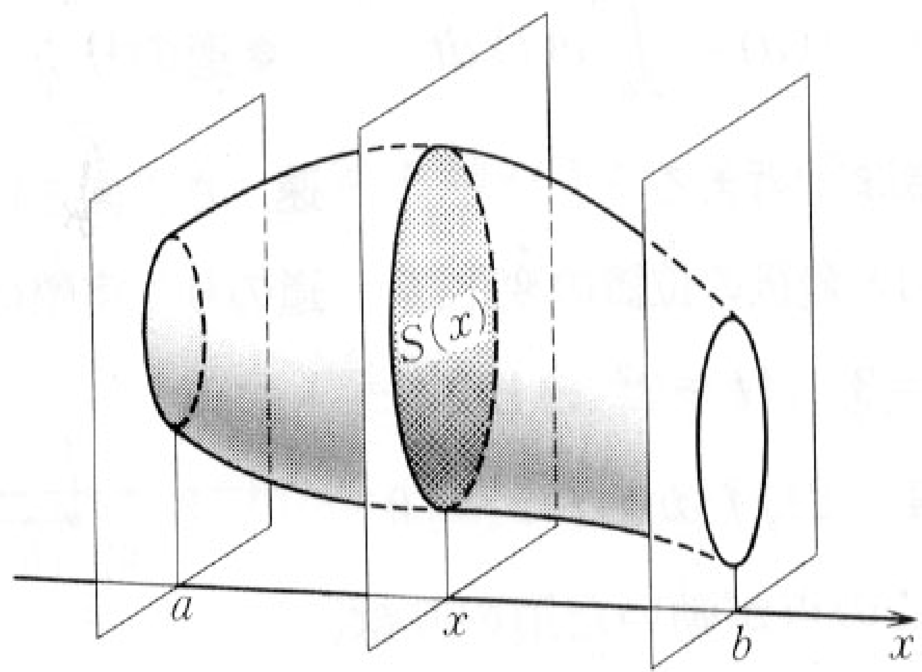
をとり, 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ から任意の点 ξ_i をとる. この図形の $x_{i-1} \le x \le x_i$ の部分を底面積 $S(\xi_i)$, 高さ $x_i - x_{i-1}$ で置き換えて, その体積の和を作ると,

$$\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

ここで分割 Δ を細かくすると, この和は

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

に収束する.



定積分による体積の計算例

例：放物線 $y=(x-2)^2$ と x 軸，y 軸とが囲む部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V を求めよ。

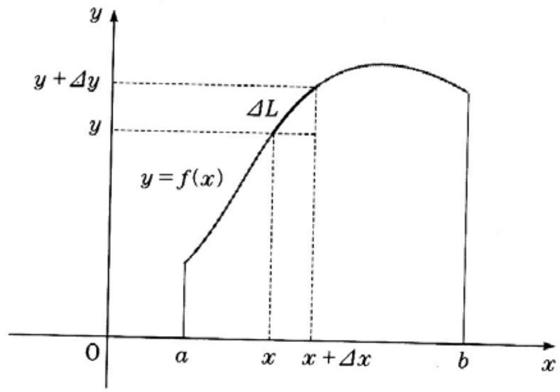
解：

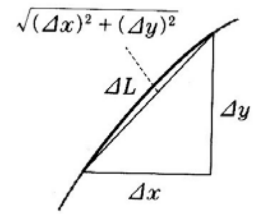
$S(x)=\pi y^2$ なので，求める体積 V は

$$V=\int_0^2 S(x)dx=\pi\int_0^2 y^2dx=\pi\int_0^2 (x-2)^4 dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}(x-2)^5\right]_0^2=\frac{32}{5}\pi$$

曲線の長さ





x の小区間 $[x, x+\Delta x]$ に対応する曲線の部分の長さを ΔL とすると，$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y$ として（上の図を参照），

$$\Delta L \fallingdotseq \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

$$\fallingdotseq \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,\Delta x$$

この近似式は$\Delta x \to 0$のとき限りなく正確にする。
よって定理により、求める長さLは

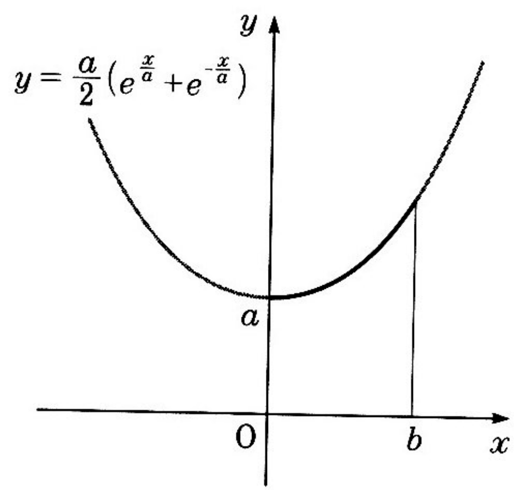
$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

曲線の長さ

例題 5　曲線　$y=\dfrac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$　の $[0,b]$ における長さ L を求めよ．
ただし　$a>0$　とする(右下の図を参照)．

【解】　$y'=\dfrac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})$　であるから，曲線の長さ L は

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^b \sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})^2}\ dx \\
&= \int_0^b \sqrt{\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})^2}\ dx \\
&= \int_0^b \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\,dx \\
&= \left[\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})\right]_0^b \\
&= \frac{a}{2}(e^{\frac{b}{a}}-e^{-\frac{b}{a}}) \qquad \diamond
\end{aligned}
$$



注意 1　この例題の曲線は**懸垂線**と呼ばれ，一様な線密度の送電線・架線などが重力の作用で自然にたれてできる形である．