第 7 章
定積分

有界関数

定義域を D とする関数 $f(x)$ において，すべての $x(\in D)$ に対して，$f(x) \leq K\,[\,f(x) \geq K\,]$ をみたす定数 K が存在すれば，

$f(x)$ は<u>上に有界</u>[<u>下に有界</u>]であるという．

上に有界でありかつ下に有界ならば，単に，<u>有界</u>であるという．

定積分の定義(1)

閉区間$[a,b]$　に分割点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b$$

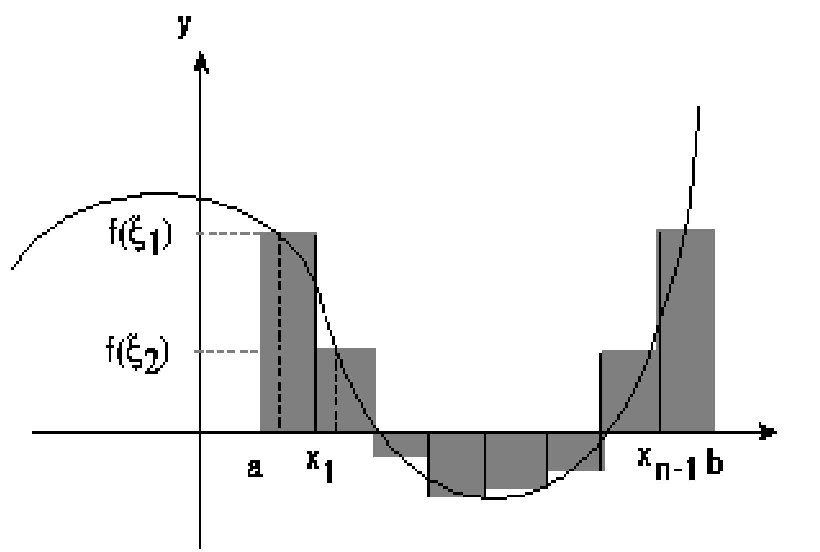
をとり、n個の小空間 $[x_{i-1}, x_i](i=1,2,\ldots,n)$　に分ける。

ただし、となりあう小区間は互いに端点を共有する。
これを閉区間　$[a,b]$　の分割といい、記号 Δ で表す。

また、n個の小区間の長さの
最大値を $|\Delta|$ で表す。つまり、

$$|\Delta| = \max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$$

Δ　のノルムという.



定積分の定義(2)

各小区間$[x_{i-1}, x_i]$から1点 ξ_iをとり,

$$S_\Delta = S_\Delta(\{\xi_i\}) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

とおく. ξ_iを$[x_{i-1}, x_i]$からとるとり方がどうであっても，一定の極限値

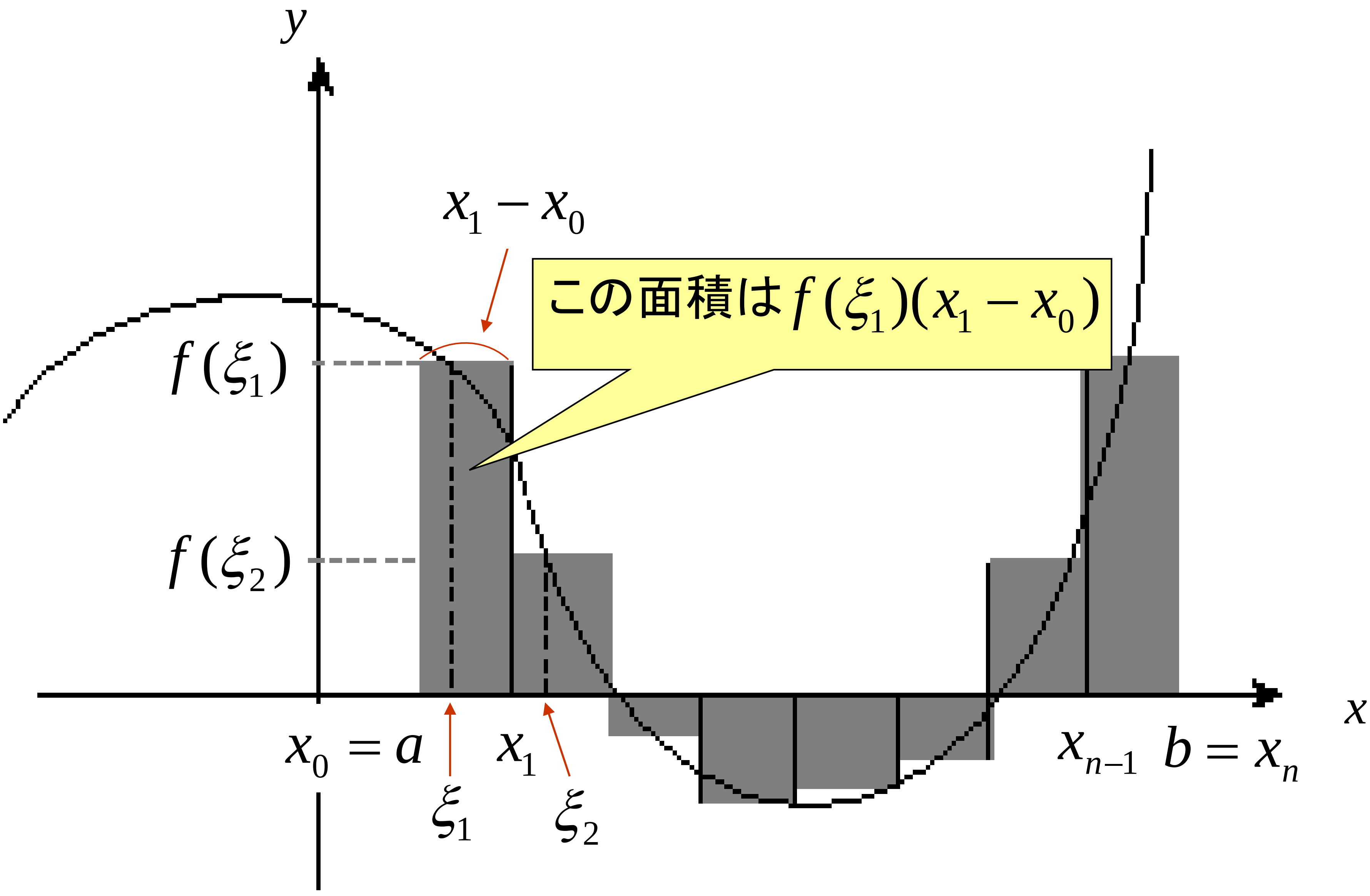
$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S_\Delta(\{\xi_i\}) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = S$$ が存在するとき,

$f(x)$は$[a,b]$で積分可能(integrable)であるという. また，極限値 Sを

$$\int_a^b f(x)dx \quad \left(= S = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right)$$

で表わし，a から bまでの<u>定積分</u>という.

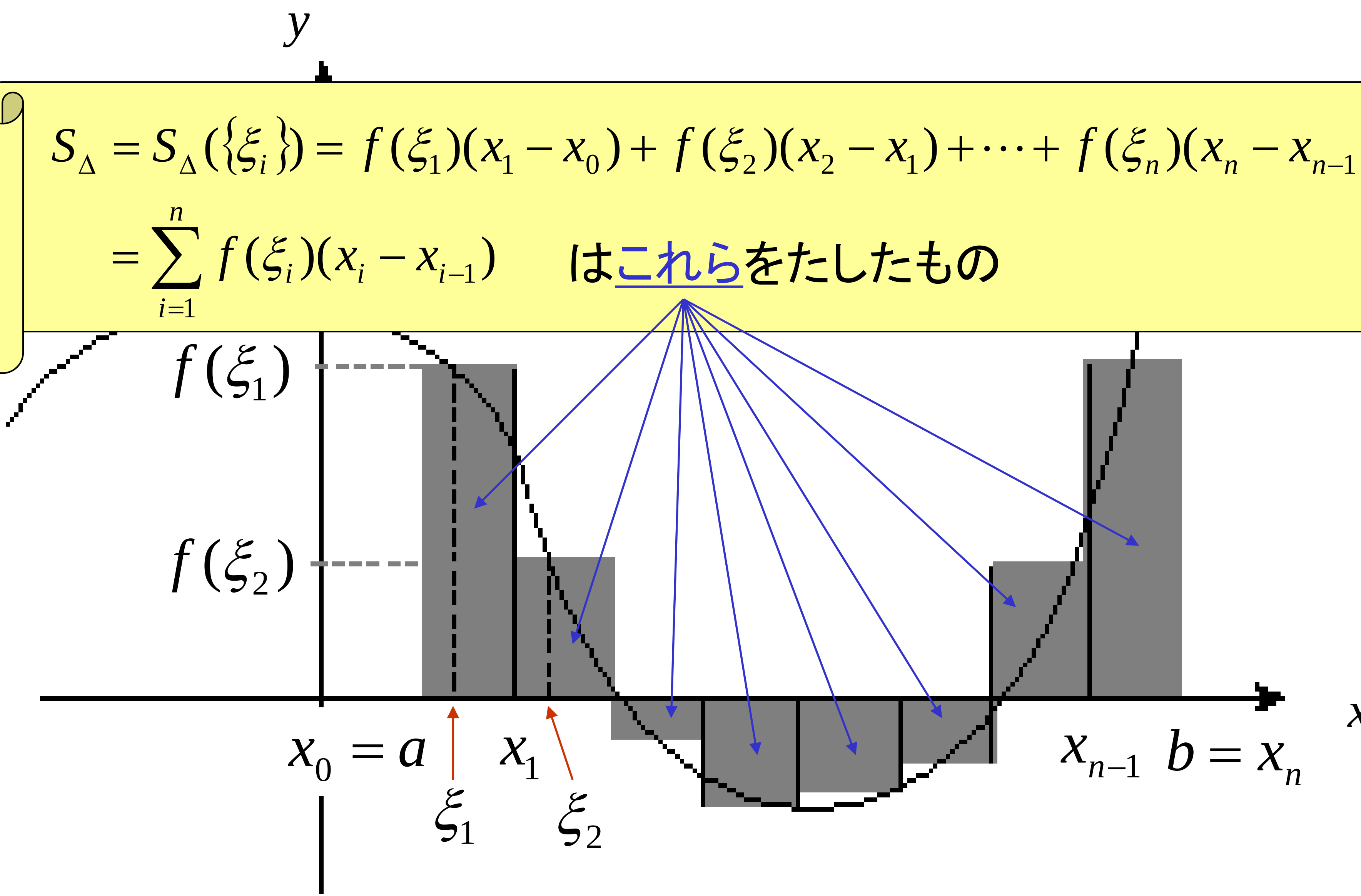
定積分の定義(3)



定積分の定義(4)

$$S_\Delta = S_\Delta(\{\xi_i\}) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

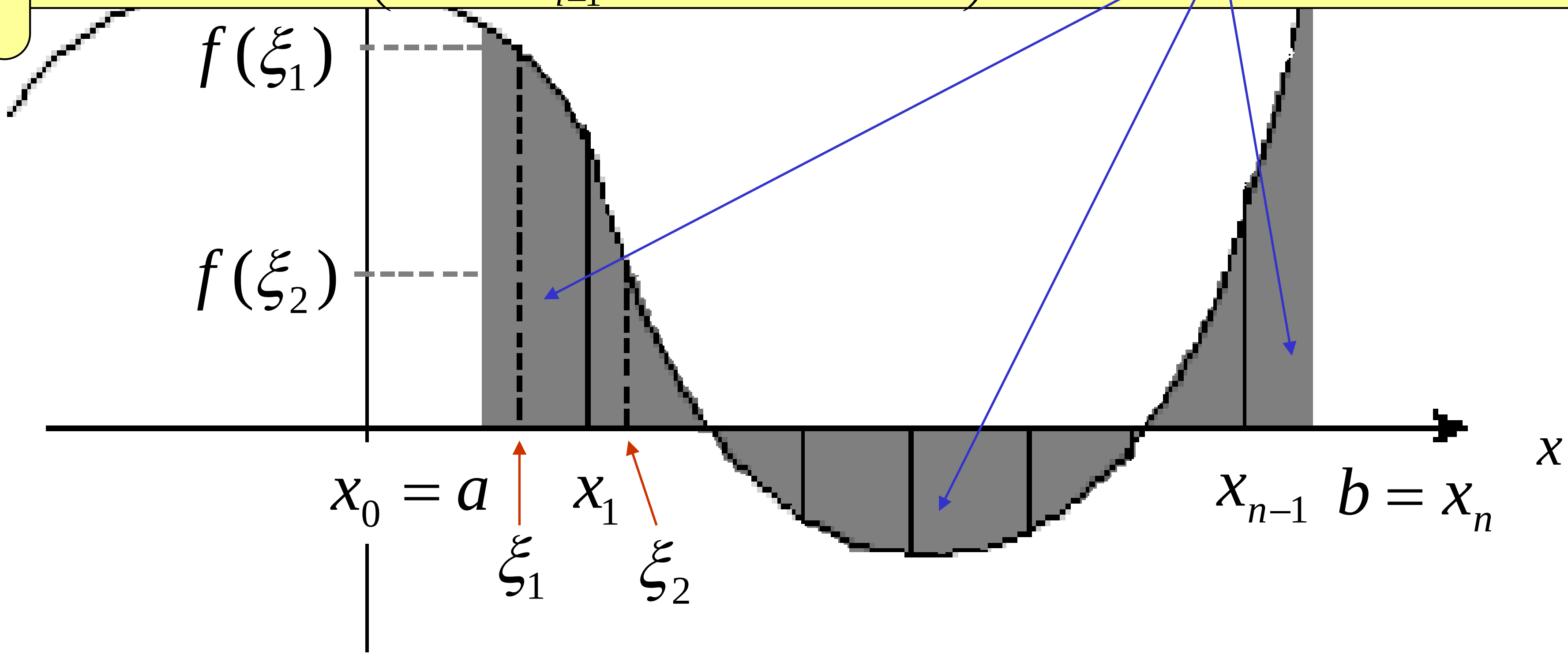
$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$ はこれらをたしたもの



定積分の定義(5)

従って，$|\Delta| \to 0$として，極限値 $\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ を考えると，

$\int_a^b f(x)\,dx \quad \left(= \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right)$ は，この面積となる



定積分に関する注意

$\int_a^b f(x)dx$ は極限値を表わしてる1つの数であって，変数 x の関数というわけではない．従って，これを $\int_a^b f(t)dt$ と表わしても，$\int_a^b f(u)du$ と表わしてもさしつかえはない．

先ほどの定義では $a=b$ や $a>b$ の場合は含まれていないので，

$a=b$ のときは $\int_a^b f(x)dx = 0$

$a>b$ のときは $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

と定義する．

積分可能性について

定理1:

$f(x)$が $[a,b]$ で連続ならば，$[a,b]$で積分可能である.

定理2:

$f(x), g(x)$ が積分可能ならば，以下のものも積分可能である.

$$f(x) \pm g(x), \quad \alpha f(x) \quad (\alpha \in \mathbf{R}), \quad f(x) \cdot g(x)$$

定積分の基本性質

定理3:

$f(x), g(x)$ が $[a,b]$で積分可能ならば，次の(1)～(6)が成立する.

(1) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(2) $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ （$\alpha \in \mathbf{R}$）

(3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(4) $a < b, f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

(5) $a < b, m \le f(x) \le M \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

(6) $a < b \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)| dx$

微分積分学の基本定理

定理4:

$f(x)$が $[a,b]$で連続ならば, $\int_a^x f(t)dt$ は x について

微分可能で,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

となる. すなわち, $\int_a^x f(t)dt$は$f(x)$の原始関数である.

この意味で, $\int_a^x f(t)dt$ を$f(x)$の不定積分という. すなわち,

$$\int_a^x f(t)dt = \int f(x)dx$$

定積分の計算原理

定理5:

閉区間$[a,b]$で連続な関数$f(x)$の一つの原始関数を$F(x)$とすると

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

である.

$F(b)-F(a)$を$\left[F(x)\right]_a^b$や$\left[F(x)\right]_{x=a}^{x=b}$で表わすことが多い.

この記法によれば,

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

定積分の計算例(1)

$$\int_0^1 (2x-3)dx$$

$$\int_0^1 (2x-3)dx = [x^2 - 3x]_0^1 = (1-3) - (0-0) = -2$$

定積分の計算は原始関数を求め，積分範囲の端点を代入し，
その差を求めればよい

定積分の計算例(2)

$$\int_0^1 e^{ax}dx \quad (a \neq 0),\quad \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx\,,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$$

$$\int_0^1 e^{ax}dx = [\frac{1}{a}e^{ax}]_0^1 = \frac{1}{a}e^a - \frac{1}{a}e^0 = \frac{1}{a}(e^a - 1)$$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}[\log(1+x^2)]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(\log 2 - \log 1) = \frac{1}{2}\log 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x (\sin x)' dx = [\frac{1}{3}\sin^3 x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}(\sin^3 \frac{\pi}{2} - \sin^3 0) = \frac{1}{3}$$

置換積分を用いた定積分の計算

定理1:

$f(x)$ が$[a,b]$で連続で, $x=\phi(t)$が$[\alpha,\beta]$で微分可能で, $\phi'(t)$が連続であり, $a=\phi(\alpha), b=\phi(\beta)$ ならば,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

置換積分を用いた定積分の計算例(1)

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

$t=\sqrt{x}$ とおくと，$x=t^2, dx=2tdt$ で，$x=0$ のとき $t=0$，$x=1$ のとき，$t=1$ ．従って，

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx=\int_0^1 \frac{1}{1+t}2tdt=\int_0^1 \frac{2(1+t)-2}{1+t}dt$$

$$=\int_0^1 \left(2+\frac{-2}{1+t}\right)dt=[2t]_0^1-2\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt$$

$$=(2-0)-2[\log(1+t)]_0^1=2-2(\log 2-\log 1)$$

$$=2-2\log 2=2(1-\log 2)$$

置換積分を用いた定積分の計算例(2)

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$$

$x=a\sin t$ とおくと，$dx=a\cos t\,dt$ で，$x\in[-a,a]$ のとき

$t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$． $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{\cos^2 t}$

ここで，$t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ のとき，$\cos t>0$ なので $\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$

従って，

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\cdot a\cos t\,dt=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin(-\pi)\right)\right)=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{a^2\pi}{2}$$

偶関数と 奇関数

関数 $f(x)$ が $f(-x) = f(x)$ なるとき，$f(x)$ を<u>偶関数</u>という.

また，関数 $f(x)$ が $f(-x) = -f(x)$ なるとき，$f(x)$ を<u>奇関数</u>という.

例：

$f(x) = x^2$ は偶関数.　$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

$f(x) = x^3$ は奇関数.　$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

$f(x) = \cos x$ は偶関数.　$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$

$f(x) = \sin x$ は奇関数.　$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

定積分の計算の簡略化(1)

定理2:

（1） $f(x)$ が偶関数ならば, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

（2） $f(x)$ が奇関数ならば, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

証明:

（1）$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$ と表わせるので,

$f(x) = f(-x)$ より $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$

ここで, $t = -x$ とおくと, $dt = -dx$. また, $x = -a, 0$ のとき $t = a, 0$

よって $\int_{-a}^{0} f(-x)dx = -\int_{a}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(x)dx$.

これより,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

（2）も同様

定積分の計算の簡略化(2)

$$\int_{-1}^{1} (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)\, dx$$

$$\int_{-1}^{1} (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)\, dx = 2\int_{0}^{1} (x^4 + x^2 + 1)\, dx$$

$$= 2\left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1\right) = 2\,\frac{3+5+15}{15} = \frac{46}{15}$$

部分積分を用いた定積分の計算

定理3:

$f'(x), g'(x)$ が $[a,b]$ で連続ならば，次式が成り立つ．

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \left[xf(x)\right]_a^b - \int_a^b xf'(x)dx$$

部分積分を用いた定積分の計算例(1)

$$\int_1^2 x\log x dx$$

$$\int_1^2 x\log x dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(x^2\right)' \log x dx$$

$$= \frac{1}{2}\left([x^2 \log x]_1^2 - \int_1^2 x^2 (\log x)' dx \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((4\log 2 - \log 1) - \int_1^2 x^2 \frac{1}{x} dx \right) = \frac{1}{2}\left(4\log 2 - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(4\log 2 - \frac{1}{2}(4-1) \right) = 2\log 2 - \frac{3}{4}$$

部分積分を用いた定積分の計算例(2)

$$\int_0^1 x^2 e^x dx$$

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = \int_0^1 x^2 \left(e^x\right)' dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 \left(x^2\right)' e^x dx$$

$$= (1e^1 - 0e^0) - \int_0^1 2xe^x dx = e - 2\int_0^1 x\left(e^x\right)' dx$$

$$= e - 2\left([xe^x]_0^1 - \int_0^1 \left(x\right)' e^x dx \right) = e - 2\left((1e^1 - 0e^0) - \int_0^1 e^x dx \right)$$

$$= e - 2\left(e - [e^x]_0^1\right) = e - 2\left(e - (e^1 - e^0)\right) = e - 2$$