第６章
原始関数と不定積分

原始関数(primitive function)

◆ある区間で定義されている関数 $f(x)$ に対して，この区間のすべての x において，

$$F'(x) = f(x)$$

が成り立つような関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という.

◆$f(x)$の原始関数を求めることを，$f(x)$を積分する(integrate)という.

◆例 : $f(x) = x^2$のとき，$\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$なので，$F(x) = \dfrac{x^3}{3}$

◆積分することは微分することの逆演算であるが，原始関数が存在しないような$f(x)$もあるので注意が必要である

原始関数の一般形

定理1:

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の1つとすると, $F(x)+c$ （c は実数）も $f(x)$ の原始関数である.

また, $f(x)$ の任意の原始関数は $F(x)+c$ （c は実数）の形に表わせる.

この実数 c を積分定数または任意定数という.

$\dfrac{x^3}{3}$ だけではないことに注意

例:

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 \qquad \left(\frac{x^3}{3}+1\right)' = x^2 \qquad \left(\frac{x^3}{3}+c\right)' = x^2$$

x^2 の原始関数は $\dfrac{x^3}{3}+c$ （c は積分定数）

不定積分

$f(x)$の原始関数の一般形$F(x)+c$ を$f(x)$の不定積分
(indefinite integral)といい，

$$\int f(x)dx$$

即ち，これは原始関数の
一般形を表す単なる記号

で表す．すなわち，

$$\int f(x)dx = F(x)+c \qquad (c:積分定数),\quad F'(x)=f(x)$$

しかし，cは毎回書くのは面倒なので，混乱しないときには，

$$\int f(x)dx = F(x)$$

と略して書く．また，

$\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}dx,\ \int 1dx$ などを，$\displaystyle\int \frac{dx}{f(x)},\ \int dx$ のように表わす

主要な関数の不定積分

(1) $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad (a \neq -1)$

(2) $\int \dfrac{1}{x} dx = \log|x| + c \quad (x \neq 0)$

(3) $\int e^x dx = e^x + c$

(4) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

(5) $\int \cos x dx = \sin x + c$

(6) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c \quad (x \neq \pm 1)$

(7) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$

(8) $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2} \log\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| + c \quad (x \neq \pm 1)$

(9) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c \quad (|x| < 1)$

(10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \log\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + c \quad (|x| < 1)$

不定積分の線形性

定理2:関数 $f(x), g(x)$ と定数 α に対して，次式が成り立つ.

(1) $\int \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

(2) $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx$

(1)の証明:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right) = \frac{d}{dx}\int f(x)dx \pm \frac{d}{dx}\int g(x)dx = f(x) \pm g(x)$$

これより, $\int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ は $f(x) \pm g(x)$ の不定積分である.

不定積分の計算例(1)

$$\int (3\sin x + x^2)dx$$

$$\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int (3\sin x + x^2)dx = \int 3\sin x dx + \int x^2 dx$$

$$= 3\int \sin x dx + \int x^2 dx = -3\cos x + \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \qquad \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$$

不定積分の計算例(2)

$$\int (4x^5 + \frac{3}{x^3})dx$$

$$\int (4x^5 + \frac{3}{x^3})dx = \int (4x^5 + 3x^{-3})dx$$

$$= 4\int x^5 dx + 3\int x^{-3} dx = 4\frac{x^6}{6} + 3\frac{x^{-2}}{-2} + c$$

$$= \frac{2}{3}x^6 - \frac{3}{2}x^{-2} + c$$

不定積分の計算例(3)

$$\int (t^3 + \frac{1}{t^2+1})dt$$

$$\int (t^3 + \frac{1}{t^2+1})dt = \int t^3 dt + \int \frac{1}{t^2+1} dt$$

$$= \frac{t^4}{4} + \tan^{-1} t + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$$

主要関数の導関数の公式[　　　]

◆多項式

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (ax^n)' = anx^{n-1} \quad (ax)' = a \quad (a)' = 0 \quad a, n \in \mathbf{R}$$

◆三角関数

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

◆逆三角関数

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

◆指数関数と対数関数

$$(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \log a \quad (\log x)' = \frac{1}{x}$$

◆双曲線関数

$$(\sinh x)' = \cosh x \quad (\cosh x)' = \sinh x \quad (\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$$

主要な関数の不定積分[　　　　]

(1) $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c$ $(a \neq -1)$

(2) $\int \dfrac{1}{x} dx = \log|x| + c$ $(x \neq 0)$

(3) $\int e^x dx = e^x + c$

(4) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

(5) $\int \cos x dx = \sin x + c$

(6) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$ $(x \neq \pm 1)$

(7) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$

(8) $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2} \log\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| + c$ $(x \neq \pm 1)$

(9) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c$ $(|x| < 1)$

(10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \log\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + c$ $(|x| < 1)$

置換積分法

定理1:

$x=\phi(t)$が微分可能ならば,

$$\int f(x)dx=\int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

証明:

$\int f(x)dx=F(x)$とすると, $F'(x)= f(x)$ である。

そこで $x=\phi(t)$とおき, $F(\phi(t))$ を考えると、

$$\frac{d}{dt}F(\phi(t))=\frac{dF(\phi(t))}{d\phi(t)}\cdot\frac{d\phi(t)}{dt}=F'(\phi(t))\phi'(t)= f(\phi(t))\phi'(t)$$

となる. よって,

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt=F(\phi(t))=F(x)=\int f(x)dx$$

置換積分法の利用の仕方

$\int f(x)dx$ において，$x = \phi(t)$ と置く．

両辺微分して，$\dfrac{dx}{dt} = \phi'(t)$．従って，$dx = \phi'(t)dt$

従って，
$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

あとは，計算する

置換積分法の利用例(1)

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}dx$$

解:このままの形では，主要な関数の不定積分の公式のどれも使えない．そこで $t = x^2 + x$ と置く．

両辺を x で微分して，$\dfrac{dt}{dx} = (2x+1)$ すなわち，$dt = (2x+1)dx$

これを用いて元の不定積分を書き直すと，

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}dx = \int \frac{1}{x^2+x}(2x+1)dx = \int \frac{dt}{t}$$

よって，

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log|x^2+x| + c$$

置換積分法の利用例(2)

一般に, 以下が成り立つ

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{1}{f(x)}df(x) = \log\left|f(x)\right| + c$$

これを利用すると, 例えば,

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx$$

$$= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}d(\cos x) = -\log\left|\cos x\right| + c$$

置換積分法の利用例(3)

$$\int x^2\sqrt{x+1}dx$$

$t=x+1$ と置くと，$dt=dx$ で，$x=t-1$

$$\int x^2\sqrt{x+1}dx=\int (t-1)^2\sqrt{t}dt=\int (t^2-2t+1)t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\int (t^{\frac{5}{2}}-2t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}})dt=\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+c$$

置換積分法の利用例(4)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$$

$t = x^2 - 4$ と置くと, $dt = 2xdx$ で,

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}2xdx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + c = t^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{x^2-4} + c$$

部分積分法

定理2:

$f(x), g(x)$ が微分可能であるとき，次式が成り立つ.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$$

証明:

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx\} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

$$= f(x)g'(x)$$

これより，$f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ は $f(x)g'(x)$ の不定積分となる.

部分積分法の利用例(1)

$$\int \log x dx$$

$$\int \log x dx = \int 1 \cdot \log x dx = \int (x)' \log x dx$$

$$= x \log x - \int x (\log x)' dx$$

$$= x \log x - \int x \frac{1}{x} dx$$

$$= x \log x - \int dx$$

$$= x \log x - x + c$$

$$= x(\log x - 1) + c$$

ここには，1が隠れていて，
しかも，1は $(x)'$
であると思うと
ころがポイント

部分積分法の利用例(2)

e^{-x} は $(-e^{-x})'$ であると思うところがポイント

$$\int xe^{-x}dx$$

$$\int xe^{-x}dx = \int x(-e^{-x})'dx = x(-e^{-x}) - \int x'(-e^{-x})dx$$

$$= -xe^{-x} - \int (-e^{-x})dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$$

ここで, $t = -x$ と置くと, $dt = -dx$

よって,

$$\int e^{-x}dx = -\int e^{-x}(-1)dx = -\int e^{t}dt = -e^{t} + c = -e^{-x} + c$$

従って, $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$

部分積分法の利用例(3)

$$\int \sin^{-1} x dx$$

部分積分を使って,

$$\int \sin^{-1} x dx = x \sin^{-1} x - \int x (\sin^{-1} x)' dx$$

$$= x \sin^{-1} x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ここで, $t = 1 - x^2$ と置くと, $dt = -2xdx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-2x) dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$= -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -t^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$$

従って, $\int \sin^{-1} x dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$