第５章
多変数関数と偏導関数

領域(1/3)

Aを平面$\mathbb{R}^2$の部分集合とするとき，Aに属さない点全体からなる集合をA^Cで表し，Aの補集合という.

Aが十分大きな円をとるとその円にすっかり含まれてしまう場合，Aを有界集合という.

(x_0, y_0)を平面上の点とし，δを正数とするとき，点(x_0, y_0)を中心とする半径δの円の内部

$$\left\{(x_0, y_0) \middle| \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\right\}$$

を$N\big((x_0, y_0), \delta\big)$で表し，点$(x_0, y_0)$の$\delta$近傍または単に近傍という.

領域(2/3)

十分小さなδをとると，近傍$N\left((x_0, y_0), \delta\right)$が集合$A$にすっかり含まれてしまうとき，$(x_0, y_0)$を$A$の内点という.

どんな小さな正数δに対しても，$N\left((x_0, y_0), \delta\right)$が$A$の点も$A^{\,c}$の点も含んでるとき，$(x_0, y_0)$を$A$の境界点という.

Aに含まれる点がすべてAの内点であるとき，Aを開集合という.
補集合$A^{\,c}$が開集合のとき，Aを閉集合という.

領域(3/3)

2つの連続関数

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

が与えられているとき，tを定めるごとに平面上の点$\bigl(x(t), y(t)\bigr)$が定まる．tを$a \leq t \leq b$の範囲にわたり変動させたとき，それらの点$\bigl(x(t), y(t)\bigr)$全体からなる集合を平面上の連続曲線または単に曲線という．

集合Aの任意の2点がAに含まれる連続曲線によって結ばれるならば，Aは連結しているとか連結集合であるという．

連結している開集合を領域という．領域に，境界点全部を付け加えた集合は、閉集合となるが，これを閉領域という．

多変数関数の極限(1/2)

2変数関数$z = f(x, y)$を考える．任意の正数εに対して適当な正数δをとると

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(x, y) - a| < \varepsilon$$

が成り立つとき，$f(x, y)$は点(x_0, y_0)でaへ収束するとか，点(x_0, y_0)における極限値はaであるといい

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = a, \text{あるいは} \lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x, y) = a,$$

$$\text{あるいは } f(x, y) \to a \qquad ((x, y) \to (x_0, y_0))$$

で表す．

この極限値とは別に，yを固定しておいてxに関する極限値$\lim_{x\to x_0} f(x, y)$をとり，次にyを動かして極限値をとった$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x, y)$や，同様にして定義される$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x, y)$を，点$(x_0, y_0)$における累次極限値という．

多変数関数の極限(2/2)

Remark:

2つの累次極限値 $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$, $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$が存在しても，それらが一致するとは限らない.

たとえ一致しても，極限値 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$が存在するとは限らない.

極限値 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$と$\lim_{x\to x_0} f(x,y)$, $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ が存在すれば，累次極限値も存在し、極限値と一致する.

多変数関数の極限の例

$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ \big((x,y)\neq(0,0)\big)$については,

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,y)=-1,\quad \lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y)=1$$

$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}\ \big((x,y)\neq(0,0)\big)$については,

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,y)=0,\quad \lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y)=0$$

しかし,(x,y)が直線$y=mx$に沿って$(0,0)$に近づくとき,

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}\to\frac{m}{1+m^2}$$

となり,mの値によって$\frac{m}{1+m^2}$の値は異なるので,

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$は存在しない

多変数関数の連続(1/2)

関数$f(x,y)$が点(x_0,y_0)の近傍で定義されているとき,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

が成り立つならば, $f(x,y)$は点(x_0,y_0)で連続であるという.

関数$f(x,y)$が集合Aの任意の点(x_0,y_0)において,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in A}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

を満たすならば, $f(x,y)$はAで連続であるとか, A上の連続関数であるという.

Remark:

$\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in A}}$ は点(x,y)がAの中だけを通って点(x_0,y_0)に近づくときの極限を意味する.

多変数関数の連続(2/2)

$\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in A}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$を$\varepsilon\delta$論法で表現すると,以下のようになる.

集合Aの任意の点(x_0, y_0)において，任意の正数εに対して適当な正数δをとると

$$(x,y) \in A, \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \quad ならば$$
$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

δは一般的にはεだけでなく点(x_0, y_0)にも関係して決まる数である. このδが点(x_0, y_0)には関係せず，εだけに関係して決められるとき，$f(x,y)$は，Aで一様連続であるという.

偏導関数(1/2)

関数$z = f(x, y)$が点(x_0, y_0)の近傍で定義されているとする.

yの値をy_0に固定したとき，1変数xの関数として$f(x, y_0)$がx_0で微分可能ならば，$f(x, y)$は点(x_0, y_0)でxに関して偏微分可能であるといい，その微分係数

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \text{ すなわち } \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

を点(x_0, y_0)におけるxに関する偏微分係数という.

これを

$$f_x(x_0, y_0), \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

などの記号であらわす.

偏導関数(2/2)

関数$z=f(x,y)$が領域Dで定義されているとき，Dのすべての点(x,y)でxに関して偏微分可能ならば，$f(x,y)$はDでxに関して偏微分可能であるという.
そのとき，$f_x(x,y)$はDにおける2変数関数となっているが，このように，2変数x,yの関数と見た$f_x(x,y)$をxに関する偏導関数という.
$f_x(x,y)$を表すには，

$$z_x,\quad \frac{\partial}{\partial x}f(x,y),\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial x}$$

のような表し方もある.
yに関する偏微分係数$f_y(x_0,y_0)$や偏導関数$f_y(x,y)$も同様にして定義される.
偏導関数$f_x(x,y), f_y(x,y)$を求めることを，それぞれ$f(x,y)$をxに関して，yに関して偏微分するという.

偏導関数の計算例

次の関数の偏導関数を求めてみよう.

(1) $z = x^3 + y^3 - 3xy$　　(2) $z = x^3y^2 \sin y$　　(3) $z = e^{\frac{y}{x}}$

---

(1) $z = x^3 + y^3 - 3xy$

$z_x = 3x^2 - 3y,\qquad z_y = 3y^2 - 3x$

(2) $z = x^3y^2 \sin y$

$z_x = 3x^2y^2 \sin y,\qquad z_y = 2x^3y \sin y + x^3y^2 \cos y$

(3) $z = e^{\frac{y}{x}}$

$$z_x = e^{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{ye^{\frac{y}{x}}}{x^2},\qquad z_y = e^{\frac{y}{x}}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{e^{\frac{y}{x}}}{x}$$

全微分

関数$z = f(x,y)$が点(a,b)で全微分可能とは，定数A, Bが存在して

$$f(x,y) = f(a,b) + A(x-a) + B(y-b) + o\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)$$

が成り立つことである．ここで，$o\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)$は

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0$$

を満たす$g(x,y)$を指す(高位の無限小)．このとき，
$A = f_x(a,b), B = f_y(a,b)$となり，

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + o\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)$$

と書ける．$x - a = h, y - b = k$として，

$$f(a+h, b+h) - f(a,b) = f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

となる．このことから$df = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$を$z = f(x,y)$の全微分という．

全微分の計算例

次の関数の全微分を求めてみよう.

$$z = f(x, y) = x^3 y + \sin xy$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 3x^2 y + y \cos xy$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = x^3 + x \cos xy$$

よって, $z = f(x, y)$の全微分は,

$$df = (3x^2 y + y \cos xy)dx + (x^3 + x \cos xy)dy$$