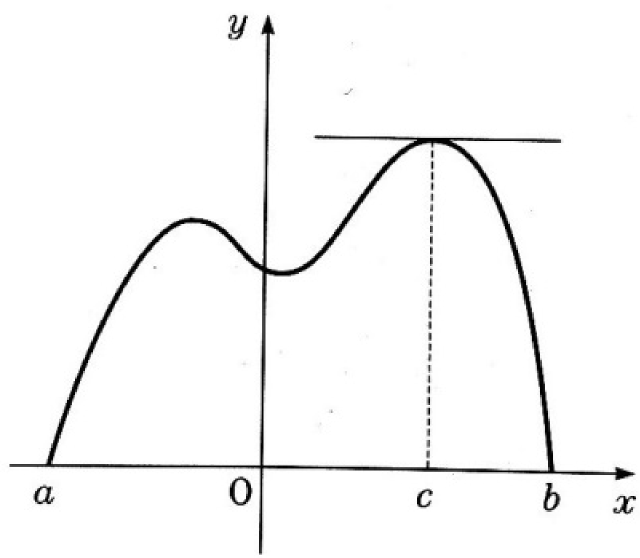
第4 章
微分法の応用

平均値の定理

- ロールの定理

> $f(x)$は$[a, b]$で連続、(a, b)で微分可能であって、
> $f(a) = f(b) = 0$ならば、$f'(c)=0$ $(a<b<c)$
> を満たすcが少なくとも1つ存在する。



平均値の定理

- 平均値の定理

$f(x)$は$[a,b]$で連続、(a,b)で微分可能とする。このとき

（1） $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\mathrm{c})$ $(\mathrm{a} < \mathrm{c} < \mathrm{b})$

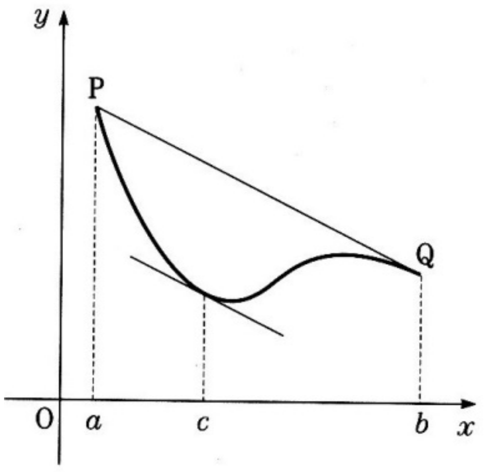
すなわち

(2) $f(b) = f(a) + f'(\mathrm{c})(b-a)$ $(a < b < c)$

を満たすcがすくなくとも1つ存在する

- 図形的な意味

この2点の中間で
PQと並行な接線が
引けるということ



平均値定理の証明

証明　(13.1) の左辺を K とおくと，

$$f(b) - f(a) = K(b-a) \qquad ①$$

$K = f'(c)$ ($a < c < b$) をみたす c が存在することを示せばよい．

さて関数

$$F(x) = f(b) - f(x) - K(b-x)$$

を考える．① により $F(a) = 0$，また明らかに $F(b) = 0$ であるから，$F(x)$ はロールの定理の条件をみたす．よって，ある c ($a < c < b$) が存在して $F'(c) = 0$ となる．ここで $F'(x) = -f'(x) + K$ である．ゆえに

$$F'(c) = -f'(c) + K = 0$$

よって $K = f'(c)$ が成り立つ．　◇

不定形の極限値

これは強力!!

定理(l'Hospitalの定理): $\frac{0}{0}$の不定形の極限値

$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \lim_{x \to a} g(x) = 0$ であっても, $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するときは,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\frac{\infty}{\infty}$の不定形の極限値

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, -\infty, \lim_{x \to a} g(x) = \infty, -\infty$であっても, $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するときは,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

定理1,2は $\lim_{x \to a}$ が $\lim_{x \to \infty}$ や $\lim_{x \to -\infty}$ であっても成り立つ

不定形の極限値の計算例

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a}\quad (a>0)$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ は $x\to 0$ のとき, $\dfrac{0}{0}$ の不定形になるので,

ロピタルの定理を利用する

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a}$ は $x\to\infty$ のとき, $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形になるので,

ロピタルの定理を利用する

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{(x^a)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{ax^a}=0$$

関数の多項式による表現

定理（Maclaurin(マクローリン)の定理）

C^n級の関数 $f(x)$ 及び2点 $0, x$ に対して、

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n,$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} \cdot x^n,\ 0 < \theta < 1$$

をみたすθxが、2点 $0, x$ の間に存在する。

R_n を剰余項という。

級数

数列$\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$が与えられたとき，$a_1, a_2, a_3, \cdots$ の和の形に書かれた$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ を考え，それを級数と呼ぶ.

a_nを，その級数の第n項という.

級数$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ は，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ のように表現される.

ここで，$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$とおき，s_nを級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の第n部分和という.

部分和の作る数列$\{s_n\}_{n=1,2,\cdots}$がsへ収束するとき，級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$はsへ収束するといい，sをその級数の和という.

このことを，記号

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \quad \text{または，} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = s$$

で表わす.

級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$が収束しないときは，発散するという.

級数の例(1)

数列 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}_{n=1,2,\cdots}$ を考えると，$a_1=\dfrac{1}{2}, a_2=\dfrac{1}{2^2}, a_3=\dfrac{1}{2^3}, \cdots$

となっている．この級数を考えると，

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

である．この級数の第n項は，もちろん $\dfrac{1}{2^n}$ である．

$n\to\infty$ のとき $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\to 0$

第n部分和は，$s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$ である．

従って，部分和の作る数列

$$s_1=\frac{1}{2}, s_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}, s_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}, \cdots, s_n=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}, \cdots$$

を考えると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n=1$

従って，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ は1へ収束する

級数の例(2)

同じく，数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1,2,\cdots}$ を考えると， $a_1=\frac{1}{1}, a_2=\frac{1}{2}, a_3=\frac{1}{3}, \cdots$
となっている．この級数を考えると，

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

である．

この級数は調和級数として知られており，実は，発散する

一般調和級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ は $\alpha>1$ のとき収束し、
$\alpha<=1$ のとき発散する。

証明：

整級数(ベキ級数)

a_n の代わりに関数 $f_n(x)$ を考えれば，関数項級数と呼ばれる

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$$

が得られる．区間 I の各点 x で級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が収束するとき，関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I で収束するという．I の各点 x で発散するときは，I で発散するという．

$f_{n+1}(x) = c_n(x-a)^n$ （ c_n, a は定数）の形の関数項級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

を整級数またはベキ級数という．

$a = 0$ の場合の整級数は，

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

の形となる．

Tayl or 展開

定理

$f(x)$ が原点0を含む区間 I で C^∞ 級の関数であるとき，Maclaurin の定理における剰余項　R_n　が I の各点 x で

$$(1) \qquad R_n \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

を満たしていれば，$f(x)$ は I で，

$$(2) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \cdots$$

ように整級数に展開される．

特に，I の全ての点 x に対して

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \le K \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

となるような定数 K が存在する場合は(1)が満たされ (2) の展開が可能である．(2)の右辺を $f(x)$ の $x=0$ まわりのTaylor展開という．

$\sin x$ のTayl or 展開

$f(x)=\sin x$ とおくと，$f(x)$ は $(-\infty,\infty)$ で C^{∞} 級の関数である．また，$n=1,2,3,\cdots$ に対して，

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}\sin x=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$$

従って，

$$f^{(2n)}(0)=\sin(\frac{2n\pi}{2})=\sin n\pi=0$$

$$f^{(2n+1)}(0)=\sin(\frac{(2n+1)\pi}{2})=\sin(n\pi+\frac{\pi}{2})=(-1)^n$$

特に，$\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\sin(x+\frac{n\pi}{2})\right|\leq 1$

従って，定理4よりTaylor展開可能で，

$$\sin x=0+\frac{(-1)^0}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{(-1)^1}{3!}x^3+\cdots+\frac{0}{2n!}x^{2n}+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots$$

$$=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots \qquad (-\infty<x<\infty)$$

主要な関数のTayl or 展開

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots \quad (-1 < x \le 1)$$

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1} x + \binom{a}{2} x^2 + \cdots + \binom{a}{n} x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

但し, $a \in \mathbf{R}, \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$

関数の値の変化

- 関数の増減

定理　$f(x)$は$[a,b]$で連続、(a,b)で微分可能とする。このとき
(a,b)で常に$f'(x)>0$ならば、$f(x)$は$[a,b]$で増加であり、
(a,b)で常に$f'(x)<0$ならば、$f(x)$は$[a,b]$で減少である。

証明　(a,b) でつねに $f'(x)>0$ とする．$[a,b]$ 内に 2 点 $x_1<x_2$ をとると，平均値の定理(p.63)により

$$f(x_2)=f(x_1)+f'(c)(x_2-x_1) \qquad (\, x_1<c<x_2 \,)$$

$f'(c)>0$ より $f'(c)(x_2-x_1)>0$ であるから

$$f(x_2)>f(x_1)$$

x_1, x_2 は任意であるから，$f(x)$ は $[a,b]$ で増加である．

(a,b) でつねに $f'(x)<0$ である場合も同様である．　◇

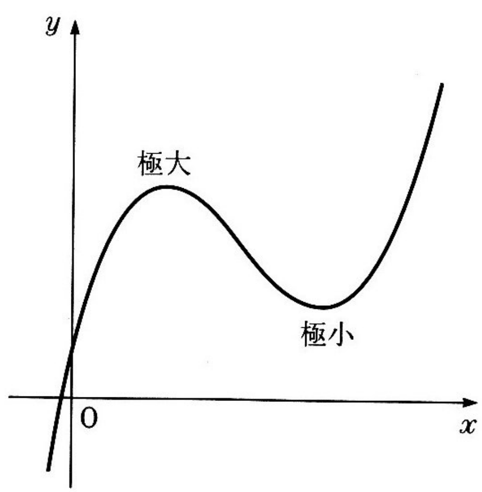
関数の値の変化

- **極大･極小**

極大・極小　$x=a$ の近くで定義されている関数 $f(x)$ について，$|h|$ が十分小さいとき つねに

$$f(a+h) < f(a) \qquad 〔\ f(a+h) > f(a)\ 〕$$

が成り立つとき，$f(x)$ は $x=a$ で**極大**〔**極小**〕になるといい，$f(a)$ を**極大値**〔**極小値**〕という．極大値・極小値をあわせて**極値**という（下の図を参照）．



関数の値の変化

- 極値の必要条件

定理　$f(x)$が$x=c$で極値をとり、そこで微分可能ならば、

$$f'(c)=0$$

しかし、この条件は十分条件ではない

例 1　関数 $f(x)=x^3$ は条件 $f'(0)=0$ をみたすが，$x=0$ で極値をとらない．　◇

関数の値の変化

- 極値の判定(1)

極値の判定

定理 17.3 $y=f(x)$ は $x=c$ を含む区間で連続で，この点以外では微分可能とする．このとき c の近くで

（1） $x<c$ で $f'(x)<0$, $x>c$ で $f'(x)>0$ ならば，
$f(x)$ は $x=c$ で極小となり，

（2） $x<c$ で $f'(x)>0$, $x>c$ で $f'(x)<0$ ならば，
$f(x)$ は $x=c$ で極大となる．

- 極値の判定（2）

極値の判定

定理 17.4 $f(x)$ について，$x=c$ を含む区間で $f''(x)$ が連続で，$f'(c)=0$ とする．このとき，

$f''(c)>0$ ならば，$f(x)$ は $x=c$ で極小となり，

$f''(c)<0$ ならば，$f(x)$ は $x=c$ で極大となる．

関数の値の変化

例題 1　$y = x^2 e^x$ の極値を求めよ．

【解】　$y' = 2xe^x + x^2 e^x$

$= x(2+x)e^x$

$y'' = (2+2x)e^x + (2x+x^2)e^x$

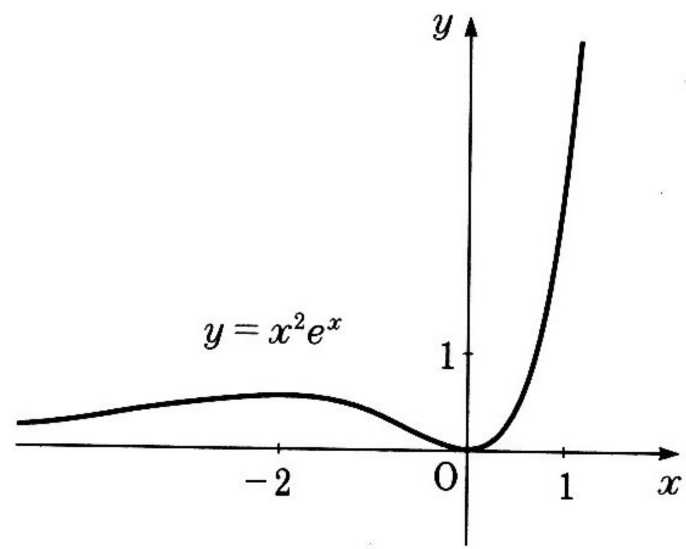
$= (2+4x+x^2)e^x$

$y' = 0$ より $x = 0, -2$ を得る．この 2 点が極値をとる x の候補点である．

（i）　$x = 0$ で $y'' = 2 > 0$，よって y はここで極小となる．極小値は 0.

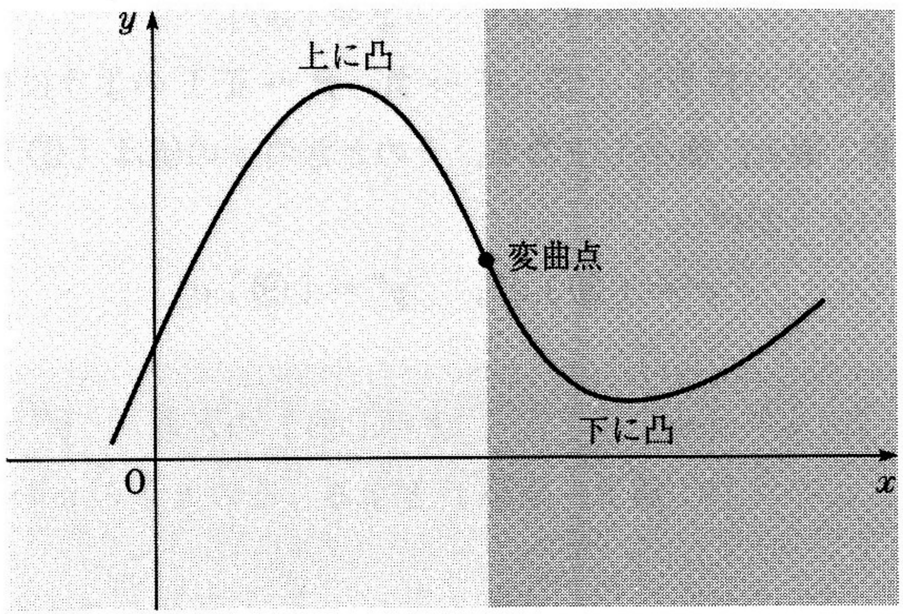
（ii）　$x = -2$ で $y'' = -2e^{-2} < 0$，よって y はここで極大となる．極大値は $4e^{-2}$ である．

右上の図はこの関数のグラフを示す．　◇



関数の値の変化

曲線の凹凸　関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が ある区間で増加ならば，曲線 $y=f(x)$ の接線は x が増加すると傾きが増加するから，左まわりに回転する．このときこの曲線は**下に凸**（とつ）〔または**上に凹**（おう）〕であるという．同様に $f'(x)$ が ある区間で減少であるとき，曲線は**上に凸**〔または**下に凹**〕であるという（下の図を参照）．



曲線の概形

一般に次のようなことを注意して曲線の性質を調べ，概形を描く．

曲線の存在する範囲はどこか

x 軸，y 軸などとの交点

増加・減少の範囲，極大，極小

対称の中心・対称軸はあるか

原点から遠くなるとどうなるか

曲線の凹凸，変曲点，など

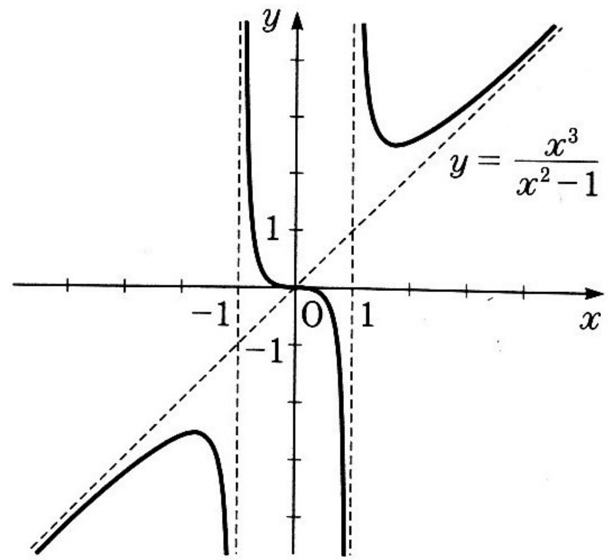
例 1 $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ の概形を描く．

この関数を $y = f(x)$ とおくと $f(-x) = -f(x)$ が成り立つ（奇関数）．よってこの曲線は原点 O に関して対称である．y', y'' を計算すると

$$y' = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}, \qquad y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

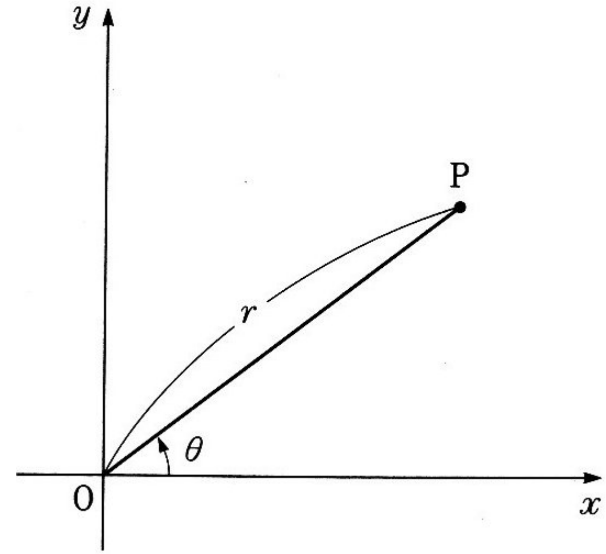
$f(x)$ の増減，極値などを表（増減表）にまとめると下のようになる．

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	$+\infty$
y'	$1-0$	$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	$1-0$
y''	-0	$-$	$-$	$-$		$+$	0	$-$		$+$	$+$	$+$	$+0$
y	$-\infty$	↗	$\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}$ (極大)	↘	$-\infty/+\infty$	↘	0	↘	$-\infty/+\infty$	↘	$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (極小)	↗	$+\infty$



極座標

極座標と極方程式　平面の点Pの原点Oからの距離を $OP = r$, OPと x 軸の正方向との角(**偏角**)を θ とするとき, (r, θ) を点Pの**極座標**という. 極座標を考えるときは, 原点Oを**極**ということがある.



直交座標と極座標の関係

$$\begin{cases} x = rcosx \\ y = rsinx \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ cos\theta = \dfrac{x}{r}, \qquad sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

極方程式

極方程式　平面の曲線が極座標 (r, θ) を用いて

$$r = f(\theta)$$

のような方程式で表されるとき，この方程式を**極方程式**という．

例 2　原点 O を中心とする半径 2 の円の極方程式は $r = 2$ である（左下の図を参照）．　◇

例 3　原点 O を始点とし，偏角が $\frac{\pi}{6}$ の半直線の極方程式は $\theta = \frac{\pi}{6}$ である（右下の図を参照）．　◇