第３章
導関数と微分

連続関数

関数 $f(x)$ が x_0 において,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

即ち,

$$^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists \delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

を満たすとき, $f(x)$ は x_0 において連続であるという

また, x_0 において連続なとき, x_0 を連続点といい, 連続点でない点を不連続点という

さらに, 関数 $f(x)$ が, ある区間 I の各点で連続なとき, $f(x)$ は区間 I で連続という

$$I : [a, b]$$

連続関数と不連続な関数の例

多項式 $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ （$a_0, a_1, \cdots, a_n$ は定数）や，三角関数 $y = \sin x, y = \cos x$ は $(-\infty, \infty)$ で連続

$y = \tan x$ は $(-\infty, \infty)$ から $x = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ を除いた全ての点で連続

ようするに，グラフが繋がっているところは連続で，
切れているところが不連続

Dirichlet関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1], x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \in [0,1], x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$$

は $[0,1]$ においていたるところ不連続

連続関数の性質

定理1:

$f(x), g(x)$ が x_0 で連続なとき,

$cf(x)$（ c は定数）　　$f(x) \pm g(x)$

$f(x)g(x)$　　$\dfrac{f(x)}{g(x)} \quad \left(g(x_0) \neq 0\right)$

は, x_0 で連続である

これは便利!!ようするに, 2つの連続関数を足したり,
掛けたりしたものは, また連続になるということ

連続関数の性質

- **定理２：**

  $y=f(x)$が$x=a$で連続で、$z=g(y)$が$y=f(a)$で連続ならば、合成関数$z=g(f(x))$は$x=a$で連続

単調増加と 単調減少

関数 $f(x)$ が,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2) \quad [f(x_1) \ge f(x_2)]$$

を満たすとき, 単調増加[単調減少]であるという

等号なし

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad [f(x_1) > f(x_2)]$$

を満たすとき, 狭義単調増加[狭義単調減少]であるという

単調増加関数と単調減少関数[狭義単調増加関数と狭義単調減少関数]を総称して, 単調関数[狭義単調関数]という

e.g.

$y = a^x \quad (a > 1), \quad (-\infty, \infty)$ は連続で狭義単調増加

$y = a^x \quad (0 < a < 1), \quad (-\infty, \infty)$ は連続で狭義単調減少

$y = \log x, \quad (0, \infty)$ は連続で狭義単調増加

微分可能と 微分係数

関数 $f(x)$ が x_0 を含むある区間で定義されているとき，極限値

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=A\ \ (A\neq\pm\infty)$$

$x-x_0=h$ とすれば同じ

が存在するならば，関数 $f(x)$ は，$x=x_0$ で微分可能という

この極限値 A を点 x_0 における微分係数といい，$f'(x_0)$ で表わす

微分係数の計算例

例：$f(x)=\sin x$ の $x=0$ における微分係数 $f'(0)$ を求めてみよう

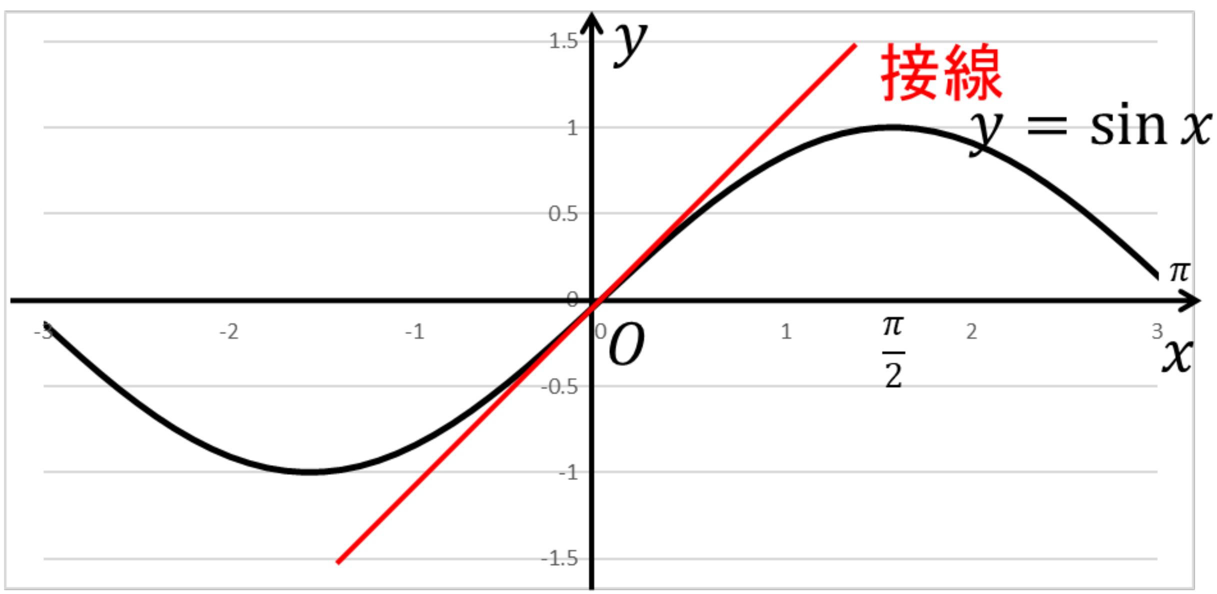
解：

$\sin 0 = 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)-\sin(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$$

前回の公式

従って，$f'(0)=1$ となる



x=aにおける微分係数の幾何学的な意味：

x=aにおける接線の傾き

導関数（１）

関数 $f(x)$ が，ある区間 I の各点で微分可能のとき $f(x)$ は 区間 I で微分可能であるという

この場合，区間 I の各点に，そこでの微分係数を対応させることにより定まる関数を $f(x)$ の <u>導関数</u>といい，

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で表わす．

導関数（２）

他にも,

$$y',\ (f(x))',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x),\ \frac{df(x)}{dx},\ Dy,\ Df(x)$$

などの表わし方もある. $\frac{dy}{dx}$ を微分商ということがある。

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

また, 関数 $f(x)$ の導関数を求めることを微分するという.

導関数の計算例

例: $f(x) = 2x^3$ を微分してみよう

解:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^3 - 2x^3}{h}$$

$$(a+b)^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - 2x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2x^3 + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - 2x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{6x^2\cancel{h} + 6x\cancel{h}^2 + 2\cancel{h}^3}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}(6x^2 + \underbrace{6xh + 2h^2}_{0})$$

$$= 6x^2$$

微分可能性と 連続性の関係

定理3：

微分可能な関数は連続である

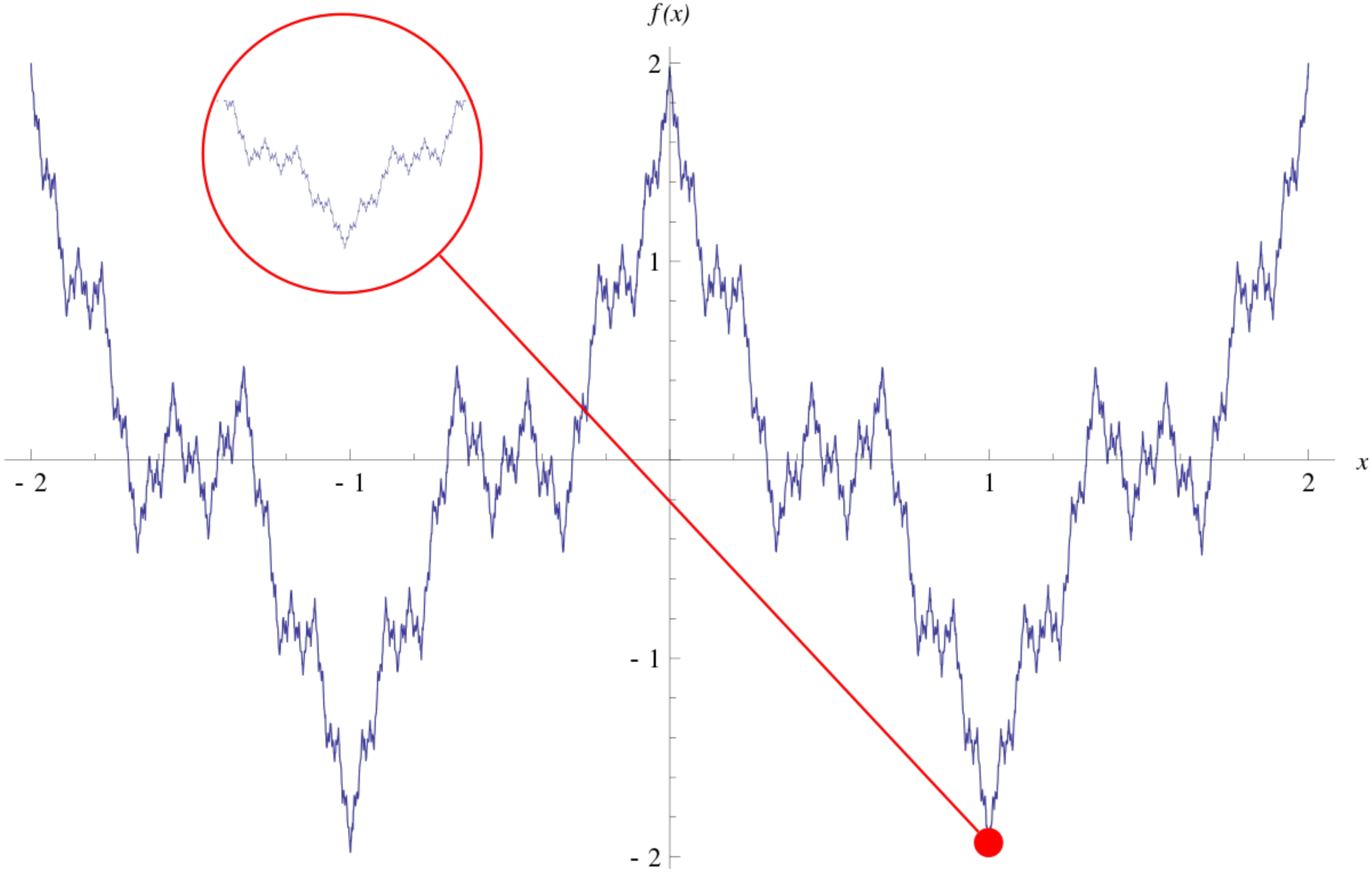
注意：

・連続であっても微分可能とは限らない

・連続だがいたるところで微分可能でない関数として，次のWeierstrassの関数が知られている

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

$$(0 < a < 1, b : \text{奇数}, ab > 1 + 3\pi/2)$$



Weierstrassの関数

導関数の性質

定理4:

$f(x), g(x), h(x)$ が微分可能のとき次式が成り立つ

（1） $(cf(x))' = cf'(x)$ （ c は定数）

（2） $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

（3） $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

（4） $g(x) \neq 0 \Rightarrow \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

特に, $\left(\dfrac{1}{g(x)} \right)' = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$

主要関数の導関数の公式

◆多項式

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (ax^n)' = anx^{n-1} \quad (ax)' = a \quad (a)' = 0 \qquad a, n \in \mathbf{R}$$

◆三角関数

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

◆逆三角関数

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

◆指数関数と対数関数

$$(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \log a \quad (\log x)' = \frac{1}{x}$$

◆双曲線関数

$$(\sinh x)' = \cosh x \quad (\cosh x)' = \sinh x \quad (\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$$

導関数の公式における注意

◆多項式

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (ax^n)' = anx^{n-1} \quad (ax)' = a \quad (a)' = 0 \quad a, n \in \mathbf{R}$$

において，$n \in \mathbf{R}$ であることに注意

従って，

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

導関数の性質と公式の利用例(1)

例：定理4の(1), (2)と x^n に関する導関数の公式を仮定して，
$y = 3x^3 + 2x + 3$ の導関数を求めてみよう

解：

$$y' = (3x^3 + 2x + 3)'$$

$$= (3x^3)' + (2x)' + 3'$$

$$= 3 \cdot 3x^2 + 2$$

$$= 9x^2 + 2$$

$$\left(f(x) + g(x)\right)' = f(x)' + g(x)'$$

$$(ax^n)' = anx^{n-1}$$

$$(ax)' = a \quad (a)' = 0$$

導関数の性質と公式の利用例(2)

例：定理4の(4)と$\sin x, \cos x$に関する導関数の公式を仮定して，
$\tan x$の導関数を求めてみよう

解：

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f(x)'g(x) - f(x)g(x)'}{g(x)^2}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

合成関数の微分法

定理5:
$y = f(u),\ u = g(x)$ がそれぞれ u, x の関数として微分可能ならば，合成関数 $y = f(g(x))$ も x の関数として微分可能で，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x)$$

が成り立つ

$y = (x^3 + 1)^{10}$ のような関数の導関数を求めるとき，積の微分の公式を用いたり，展開して微分していたら大変面倒！！
このような場合，合成関数と見て，合成関数の微分法を利用！

$$y = u^{10}, u = x^3 + 1;$$

$$\frac{dy}{dx} = (u^{10})'(x^3 + 1)' = 10(x^3 + 1)^9 \cdot 3x^2 = 30x^2(x^3 + 1)^9$$

合成関数の微分法の証明

$$y = f(u), u = g(x), \quad let \quad \Delta x = x_1 - x_2, \quad \Delta u = g(x_1) - g(x_2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u+\Delta x) - f(u)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u+\Delta x) - f(u)}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u+\Delta x) - f(u)}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f^{'}(u) \cdot g^{'}(x)$$

($\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u / \Delta x$が存在するので、
$\Delta x \to 0$ならば、$\Delta u \to 0$)

合成関数の微分法の利用例(1)

例: $y=\cos(x^2+x)$ を微分してみよう

解:
$\cos(x^2+x)$ を $y=\cos u$ と $u=x^2+x$ の合成関数とみて,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-\sin u(2x+1)=-(2x+1)\sin(x^2+x)$$

$$(\cos u)'=-\sin u$$
$$(x^2+x)'=2x+1$$

逆関数の微分法

定理6:
関数 $y = f(x)$ が微分可能な狭義単調関数で $f^{-1}(x) \neq 0$ ならば，その逆関数 $x = f^{-1}(y)$は $y = f(x)$ の値域で微分可能であり，

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{\dfrac{d}{dx} f(x)} \quad \text{すなわち} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

逆関数の微分法の利用例(1)

例 : $y=\log x$の導関数を確認してみる

解 :

$y=\log x$ は, $x=e^y$ の逆関数であった

従って,

$$\frac{d\log x}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{de^y}{dy}}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{e^{\log x}}=\frac{1}{x}$$

$$(e^x)'=e^x$$

$$e^{a\log x}=x^a$$

逆関数の微分法の利用例(2)

例: $y = \sin^{-1} x$ の導関数を確認してみる

解:

$y = \sin^{-1} x$ は, $x = \sin y$ の逆関数であった

従って,

$$\frac{d \sin^{-1} x}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\dfrac{d \sin y}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

高階導関数（ 1

導関数 $f'(x)$ が微分可能ならば，$f'(x)$ の導関数が考えられる．これを，$f''(x)$ で表わし，$f(x)$ の2階導関数という．$f''(x)$が微分可能ならば，3階導関数 $f'''(x)$が考えられる．このようにして，一般に $f(x)$ がn回微分可能ならば，n階導関数が考えられる．これを，$f^{(n)}(x)$で表わす．すなわち，

$$f^{(1)}(x) = f'(x),\ f^{(2)}(x) = f''(x), \cdots$$

特に，

$$f^{(0)}(x) = f(x)$$

と定義しておく．2階以上の導関数を高階導関数という．n階導関数について，$f^{(n)}(x)$の他にも，

$$y^{(n)},\quad \frac{d^n y}{dx^n},\quad \frac{d^n}{dx^n} f(x),\quad \frac{d^n f(x)}{dx^n},\quad D^n y,\quad D^n f(x)$$

のような表わし方がある．n階導関数はn次導関数ともいわれる．

高階導関数(2)

- 関数$f(x)$が微分可能で、導関数 $f'(x)$ が連続とき、$f(x)$は C^1 級の関数という。
- 一般に、関数$f(x)$が n回微分可能で、n階の導関数 $f^{(n)}(x)$ が連続とき、$f(x)$はC^n 級の関数という。

高階導関数の計算例

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x = \sin(x+\frac{n\pi}{2}),\quad \frac{d^n}{dx^n}\cos x = \cos(x+\frac{n\pi}{2})$$

$$\frac{d}{dx}\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \frac{d}{d(x+\frac{\pi}{2})}\sin(x+\frac{\pi}{2})\cdot\frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\sin x = \frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\sin x = \frac{d}{dx}\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x+\frac{\pi}{2})\cdot 1 = -\sin x$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\sin x = \frac{d}{dx}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\sin x = \frac{d}{dx}\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2}) = \cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2}) = \sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x = \frac{d}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\sin x = \frac{d}{dx}\sin(x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}) = \cos(x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}) = \sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

$\cos x$ のn次導関数も同様

$$\cos(x+\theta) = \sin(x+\theta+\frac{\pi}{2})$$