第 2 章
極限

極限（１）

関数 $y=f(x)$ において，
xが限りなくaへ近づくとき，
$f(x)$が限りなくbに近づくならば，
xがaに近づくときの$f(x)$の極限値(limit)はbであるといい，

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \quad \text{または,}\ f(x)\to b \quad (x\to a)$$

で表わす

$$e.g.\ \lim_{x\to 2} x^2 = 4 \ \text{または}\ x^2 \to 4 \ (x\to 2)$$

極限（２）

- 左側極限値

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b$$

このbを$f(x)$のaにおける左側極限

- 右側極限値

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b$$

このbを$f(x)$のaにおける右側極限

極限の基本性質

有限であるのがポイント
∞などのときは一般にはダメ

$\lim_{x\to a} f(x),\ \lim_{x\to a} g(x)$ が存在して、それらの極限値が有限ならば、

（1）任意の定数 c に対して，$\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$

（2）$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

（3）$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$

（4）$\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ のときは，$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

はさみうち

（5）$f(x) < h(x) < g(x)$ で $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = A$ ならば，

$\lim_{x\to a} h(x)$ も存在し $\lim_{x\to a} h(x) = A$

極限の基本性質の利用例

（1）$\lim_{x\to3} 4x^2 = 4\lim_{x\to3} x^2 = 4\cdot 9 = 36$

（2）$\lim_{x\to1}(x^2 + x) = \lim_{x\to1} x^2 + \lim_{x\to1} x = 1+1 = 2$

（3）$\lim_{x\to2} x\sqrt{x} = \lim_{x\to2} x \cdot \lim_{x\to2}\sqrt{x} = 2\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

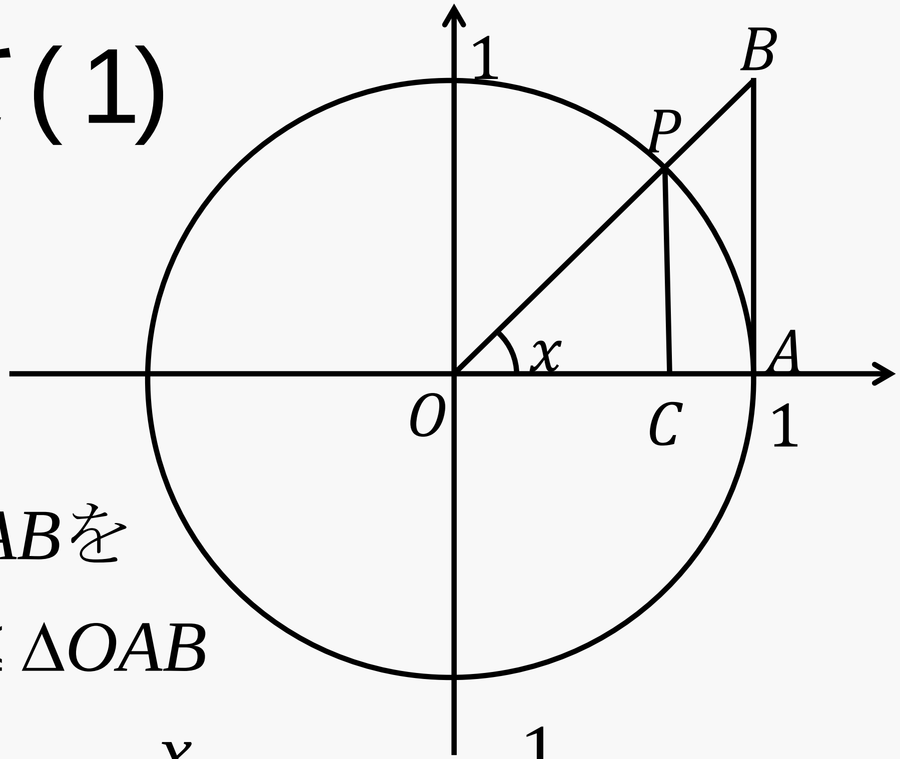
（4）$\lim_{x\to2}\frac{x-1}{x} = \frac{\lim_{x\to2}(x-1)}{\lim_{x\to2} x} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

$\cos 0 = 1$

（5）$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$ で $\lim_{x\to0}\cos x = \lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x} = 1$ なので,

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ も存在し $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$について(1)



$0 < x < \frac{\pi}{2}$なる角度xに対して

右図のΔOPC，扇形OAP，ΔOABを

考えると，$\Delta OPC \leq$扇形$OAP \leq \Delta OAB$

$\Delta OPC = \frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot \sin x$, 扇形$OAP = \frac{x}{2}$, $\Delta OAB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$

よって, $\frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x}$

$\sin x > 0$より, $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$について(2)

$$\cos x<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \quad\Rightarrow\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x}$$

注意!

$0<a<x<b$ のとき、$\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{a}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos x=1, \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$より, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

重要な極限値

[1] $$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$$

[2] $$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{x}} = 0 \qquad (\alpha > 0)$$

[3] $$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^{\alpha}}{\log x} = +\infty \qquad (\alpha > 0)$$

[4] $$\lim_{x\to +\infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = \lim_{x\to -\infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e \qquad (\alpha > 0)$$

極限の基本性質における注意

(2) $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)$ や

(4) $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$ のときは，$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$

において，形式的に x に a を代入した結果，

$\infty-\infty$ や $\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$ になってしまうような場合には，

極限値が存在するかどうかわからない。

存在する場合は，不定形の極限値と呼ばれる。

不定形の極限値を求める場合には，式変形などを行い，

約分をして不定形でなくするとか，

ケースバイケースで，色々考えなければならない。

この他にも，$1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ など，

様々な不定形があるので注意する。

不定形の極限値

e.g. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ の極限値を求める

解:

まず，$x \to 2$ のとき，

分子= $x^2-3x+2 \to 0$，分母= $x^2-4 \to 0$ なので，

$\dfrac{0}{0}$ の不定形の極限値である。

不定形でなくなった

従って，工夫を必要とする。

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

例題(1)

次の極限値を求めよ

不定形　不定形

(a) $\lim_{x\to 2}(x^2+4x)$ (b) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ (c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(a) $\lim_{x\to 2}(x^2+4x)=\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}4x=4+8=12$

(b) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1-3\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2}}{1-4\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{1}=1$

(c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}2\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}2\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{(1+x)-(1-x)}=\lim_{x\to 0}2\frac{\cancel{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\cancel{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}}$$

$$=\lim_{x\to 0}2\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=2\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1$$

例題(2)

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$を用いて，$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ 極限値を求めよ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}$$

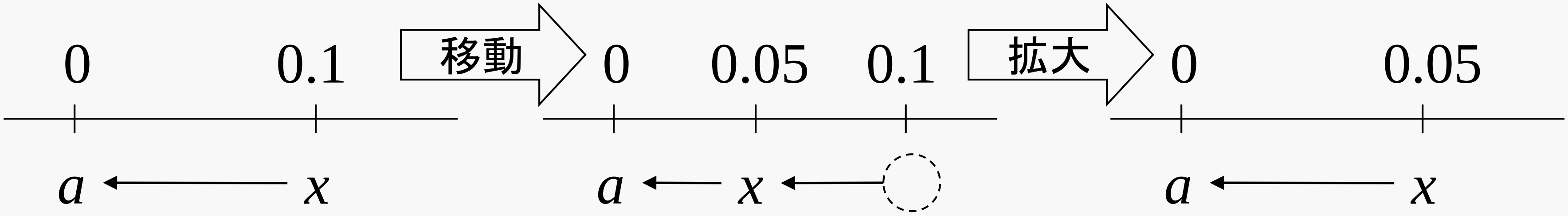
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}}\cdot\frac{2}{3}=1\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

極限の再検討

極限値の定義では，関数 $f(x)$ において，
x が限りなく a へ近づくとき，
$f(x)$ が限りなく b に近づくならば，
x が a に近づくときの $f(x)$ の 極限値(limit)は b である
としていた

この辺が，厳密性に欠け曖昧！

「 x が限りなく a へ近づく」とはどういう意味か？



$\varepsilon\delta$ 論法を用いた極限の再定義

任意の正数 ε に対して、適当な正数 δ を選ぶと,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

が成り立つとき, 点 a で $f(x)$ は b に収束するといい,
b を点 a における $f(x)$ の極限値という

このことを,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{または,} \quad f(x) \to b \quad (x \to a)$$

で表わす

どんなに小さな ε を指定され, $f(x)$ と b の距離を ε 以下にできるかと無理難題をいわれても, うまく δ を見つけてきて, x と a の距離が δ 以下の場合にはできますよと主張できる

$\varepsilon\delta$ 論法の利用の仕方

例(1):$\varepsilon\delta$ 論法による $\lim_{x\to 1} 2x = 2$ の証明

解:

どんなに小さな $\varepsilon > 0$ に対しても, うまくδ を選んでやって,

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |2x-2| < \varepsilon$$

が成り立つことを示せばよい

そこで, $|x-1|$ と $|2x-2|$ を見比べ $|2x-2| = 2|x-1|$ に着目

よって, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ と選んでやれば,

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |2x-2| = 2|x-1| < 2 \cdot \delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となる

例(2): $\varepsilon\delta$論法による$\lim_{x\to 1} 4x^2 = 4$の証明

解:

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |4x^2 - 4| < \varepsilon$

が成り立つような δ が存在することを示せばよい

$|x-1|$ と$|4x^2-4|$を見比べ, $|4x^2-4| = 4|x+1||x-1|$

に着目

そこでまず, $\delta = 1$とおくと, $|x-1| < \delta = 1$より $|x+1| < 3$がいえる

このとき,

$$|4x^2-4| = 4|x+1||x-1| < 4\cdot 3|x-1| < 12\delta$$

三角不等式

|a+b|≦|a|+|b|を使用

$|4x^2-4| < \varepsilon$ とするには, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{12}$ と選ぶ必要もある

よって, δ を 1 と $\dfrac{\varepsilon}{12}$ の小さいほうとなるように選ぶと,

$$|x-1| < \delta \le 1, \frac{\varepsilon}{12} \Rightarrow$$

$$|4x^2-4| = 4|x+1||x-1| \le 12|x-1| < 12\cdot\delta \le 12\cdot\frac{\varepsilon}{12} = \varepsilon$$

例(3): $\varepsilon\delta$論法による$\lim_{x\to 1} 4x^2 = 4$の証明 (別解)

解:

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |4x^2 - 4| < \varepsilon$

が成り立つような δ が存在することを示せばよい

$|x-1|$ と $|4x^2-4|$ を見比べ, $|4x^2-4| = 4|x+1||x-1|$

に着目。一方,

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |x+1| = |x-1+2| \leq |x-1| + 2 < \delta + 2$$

このとき,

$$|4x^2-4| = 4|x+1||x-1| < 4\cdot(\delta+2)\delta$$

$|4x^2-4| < \varepsilon$ とするには, $\delta = \sqrt{1+\frac{\varepsilon}{4}} - 1$ と選べばよい

実際,

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |4x^2-4| = 4|x+1||x-1| < 4(\delta+2)\delta$$

$$= 4\left(\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{4}}+1\right)\left(\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{4}}-1\right) = \varepsilon$$

連続関数

- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ となるとき、$f(x)$は$x=a$で連続、または点aで連続
- 定理：$y=f(x)$が$x=a$で連続で、$z=g(y)$が$y=f(a)$で連続ならば、合成関数$z=g(f(x))$は$x=a$で連続
- $f(x)$が空間Iのどの点でも連続のとき、$f(x)$は空間Iで連続