第１章
関数とグラフ

関数(1)

$y = x^2$を考えると,

$$x = 1 \quad \text{とおけば}\ y = 1^2 = 1,$$
$$x = -1\text{とおけば}\ y = (-1)^2 = 1,$$
$$x = 5 \quad \text{とおけば}\ y = (5)^2 = 25,$$

とy が定まる

これは, $y = x^2$という式が, x の個々の値に対して, どのような y を対応させるかを決定している

このように, x に対する y の対応の仕方を定める規則が与えられているとき, その規則を<u>関数</u>という

ようするに写像のことだが, 解析では関数と呼ぶ

関数(2)

f が集合Xから集合 Y へ写像であるとき，これは$x \in X$に，
ある $y \in Y$を対応させる規則を与えているので，fを関数と見て，

$$y = f(x)$$

とかく。

このとき，x を独立変数，y を従属変数という

また，$X, Y, \{f(x) \mid x \in X\}$ をそれぞれ定義域，終域，関数 f の値域と呼ぶ
独立変数と従属変数だけで関数を表すこともある

$$x : \{1,3,5,7\}$$

$$y : \{2,4,6,8\}$$

関数と 全単射

関数 $y = f(x)$ において,

$f(x)$が全射 $\Leftrightarrow$ 終域 $=$ 値域

$f(x)$が単射 $\Leftrightarrow$ $x \neq x'$ならば$f(x) \neq f(x')$

$f(x)$ が全射かつ単射なときは, 全単射という

単調関数

- 単調増加（関数）

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \le f(x_2) \qquad (x_1, x_2 \in X(\text{定義域}))$$

- 単調減少（関数）

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \ge f(x_2) \qquad (x_1, x_2 \in X)$$

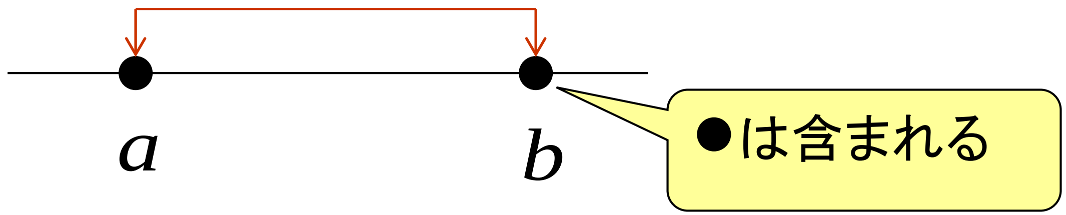
- 単調関数
  - 単調増加と単調減少のあわせ
- 狭義の単調増加と単調減少

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \qquad (x_1, x_2 \in X)$$

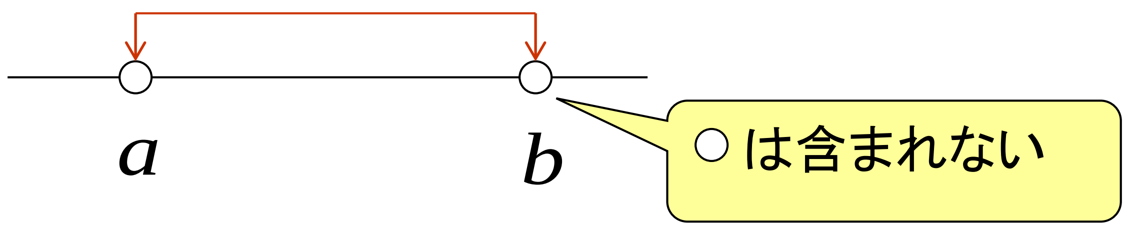
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \qquad (x_1, x_2 \in X)$$

区間(1)

$\{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b,\quad a,b \in \mathbf{R}\}$を**閉区間**と呼び, $[a,b]$ とかく

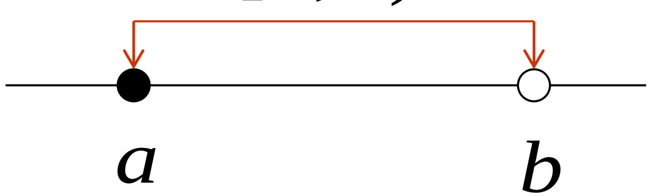


$\{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b,\quad a,b \in \mathbf{R}\}$を**開区間**と呼び, (a,b) とかく

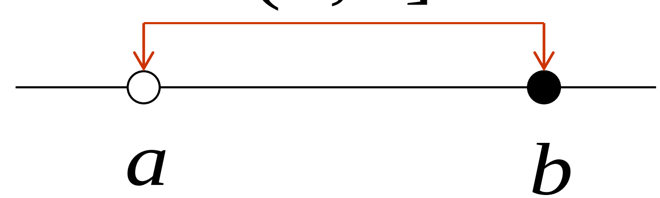


また, a, bの一方のみ含む集合を $[a,b)$ や $(a,b]$で表わす

$[a,b)$

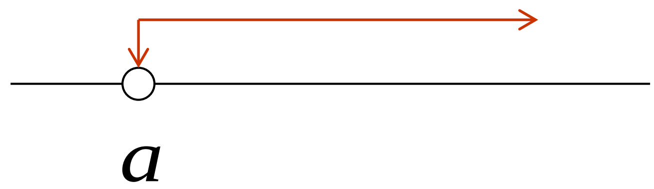


$(a,b]$



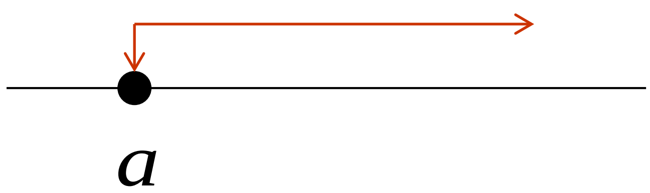
区間(2)

また，x が a よりも大きな任意の値をとるとき，すなわち，
$\{x\in\mathbf{R}\mid a<x,\quad a\in\mathbf{R}\}$のときは，$(a,+\infty)$と表わす

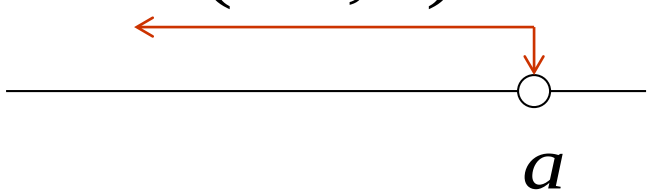


$[a,+\infty)$ や $(-\infty,a)$も同様

$[a,+\infty)$



$(-\infty,a)$



$(-\infty,+\infty)$は，実数全体，すなわち$\mathbf{R}$ を表わす

関数の例

- $f(x) = x+1$

定義域は $(-\infty,+\infty)$，終域は $(-\infty,+\infty)$，値域は $(-\infty,+\infty)$
終域=値域なので全射
$f(x_1) \neq f(x_2)$とすると$x_1+1 \neq x_2+1$より $x_1 \neq x_2$となるので単射
従って，$f(x)$は全単射
$x_1 < x_2$ より $x_1+1 < x_2+1$ となるので、単調増加

- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

定義域は $(0,+\infty)$，終域は $(0,+\infty)$，値域は $(0,+\infty)$
終域=値域なので全射
$f(x_1) \neq f(x_2)$とすると $\dfrac{1}{\sqrt{x_1}} \neq \dfrac{1}{\sqrt{x_2}}$ より $x_1 \neq x_2$となるので単射
従って，$f(x)$は全単射、さらに、単調減少

合成関数(1)

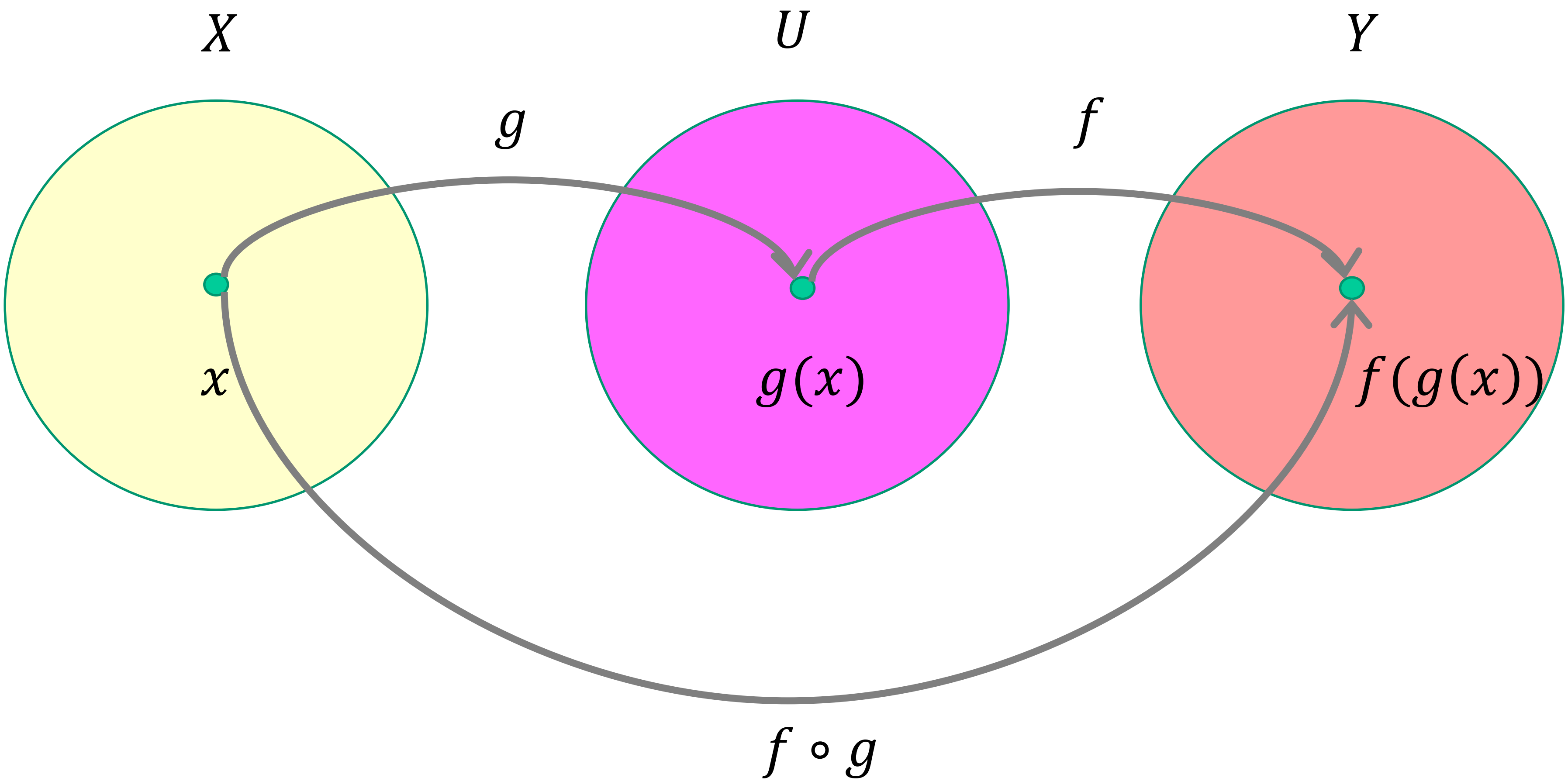
2つの関数

$$u = g(x),\ y = f(u)$$

に対して，これを順に引き続いて施す関数 $y = f(g(x))$ を，g と f との**合成関数**とよび，$f \circ g$ で表わす

$$y = f(g(x)) \Leftrightarrow y = (f \circ g)(x)$$

合成関数(2)



$$u = g(x) \longrightarrow y = f(u) = f(g(x) = f \circ g(x)$$

合成関数(3)

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
x \arrow[r, "u=g(x)=x^2+3"] \arrow[dr, "y=f\circ g(x)"'] & u=x^2+3 \arrow[d, "y=f(u)=\sqrt{u}"] \\
& y=f(g(x))=\sqrt{x^2+3}
\end{tikzcd}$$

逆関数

一般に、全単射な関数　$y = f(x)$　では、y の値に対してxの値が1つだけ決まる。y に　$y = f(x)$　なる x を対応させる関数を f の逆関数とよび　f^{-1} で表わす

逆関数の求め方：

もとの関数　$y = 5x + 4$

x について解く

$x = (y - 4)/5$

x と y を入れかえる

逆関数　$y = f^{-1}(x) = (x - 4)/5$

例題

$$f(x)=\frac{1}{2}x+1 \quad x\in[2,4], \qquad g(x)=\frac{1}{9}x^2+2 \quad x\in[0,3]$$

（1）　$(f\circ g)(x), \quad (g\circ f)(x)$　を求めよ。

（2）　$g^{-1}(x)$ を求めよ。

解:

（1）

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\frac{1}{9}x^2+2)=\frac{1}{2}(\frac{1}{9}x^2+2)+1=\frac{1}{18}x^2+2$$

$$x\in[0,3]$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\frac{1}{2}x+1)=\frac{1}{9}(\frac{1}{2}x+1)^2+2=\frac{1}{36}(x+2)^2+2$$

$$x\in[2,4]$$

（2） $y=g(x)=\dfrac{1}{9}x^2+2$ 　$x\in[0,3]$ に対して，値域は，$y\in[2,3]$

$y=g(x)$ を x について解いて，$x=3\sqrt{y-2}$

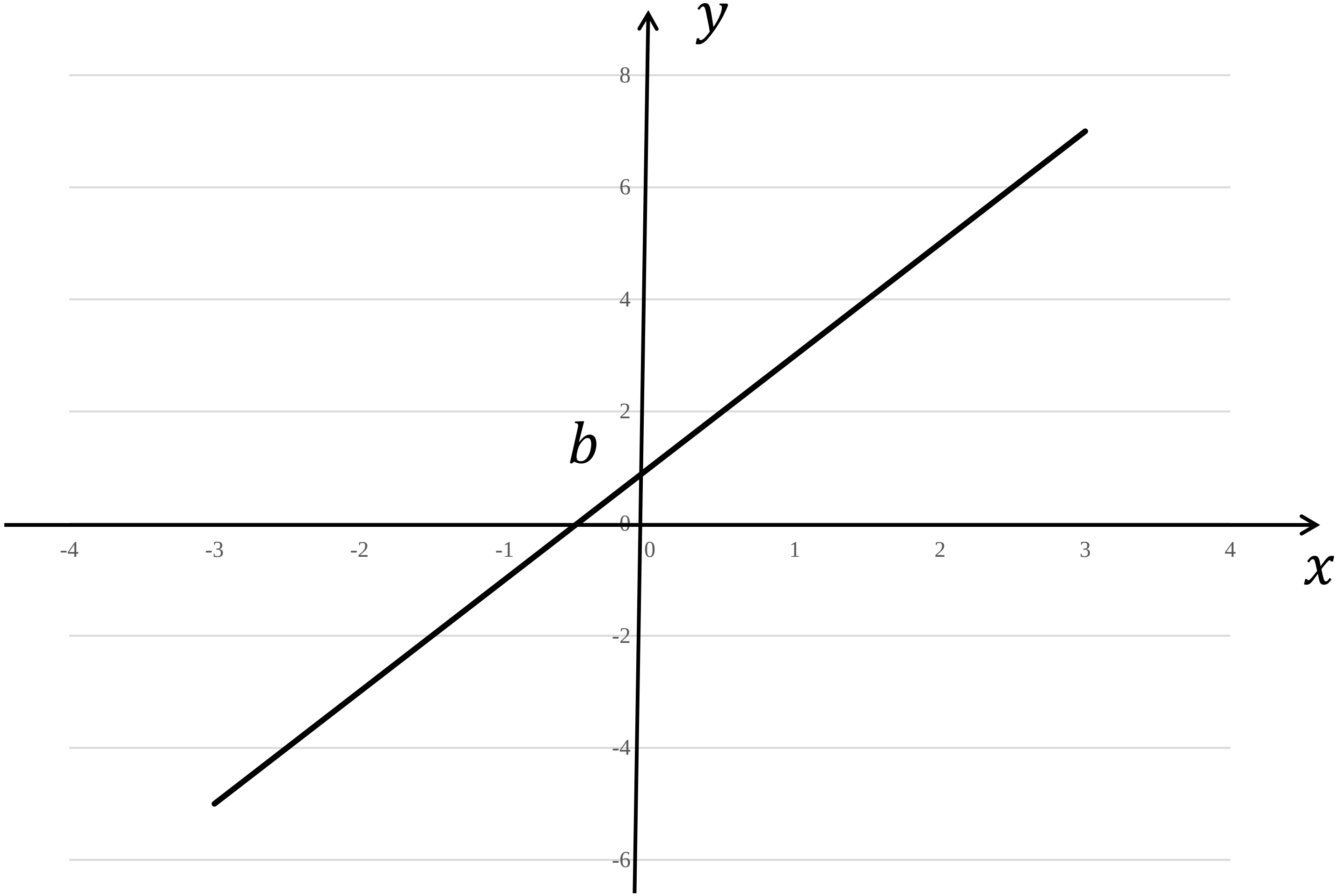
$x\in[0,3]$，すなわち，$x\geq 0$ に注意

x と y を入れかえて，さらに定義域と値域も入れかえて，

$$y=g^{-1}(x)=3\sqrt{x-2}\quad x\in[2,3]$$

一次関数

$$y = ax + b$$



指数関数（１）

指数

$a \in \mathbf{R}, a > 0, n, m \in \mathbf{N}$ に対して，

$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{\text{n個}}, a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$ だった

従って，

$$a^3 = a \times a \times a, a^{-3} = \frac{1}{a^3}, a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$$

これで指数が有理数から実数に拡張できた

では，$a^{\sqrt{2}}$ はどうか $\sqrt{2} = 1.414213\cdots$ なので，

$a^{1.4}, a^{1.41}, a^{1.414}, \cdots$ の極限を $a^{\sqrt{2}}$ と定義する

指数関数（2）

指数法則

$a \in \mathbf{R}, a > 0, x, y \in \mathbf{R}$ に対して，

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

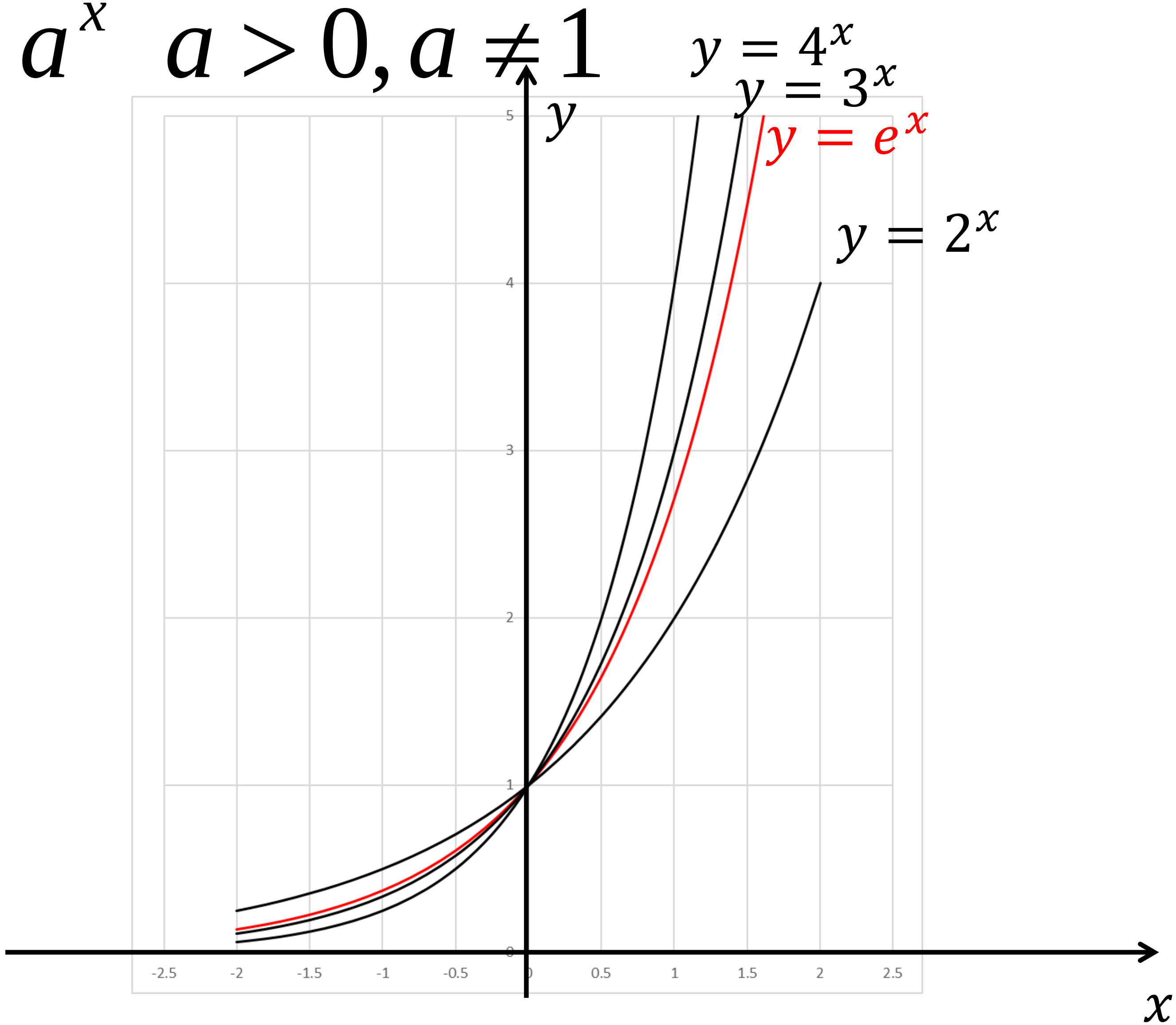
$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^0 = 1$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

指数関数（３）

$$y = a^x \quad a > 0, a \neq 1$$



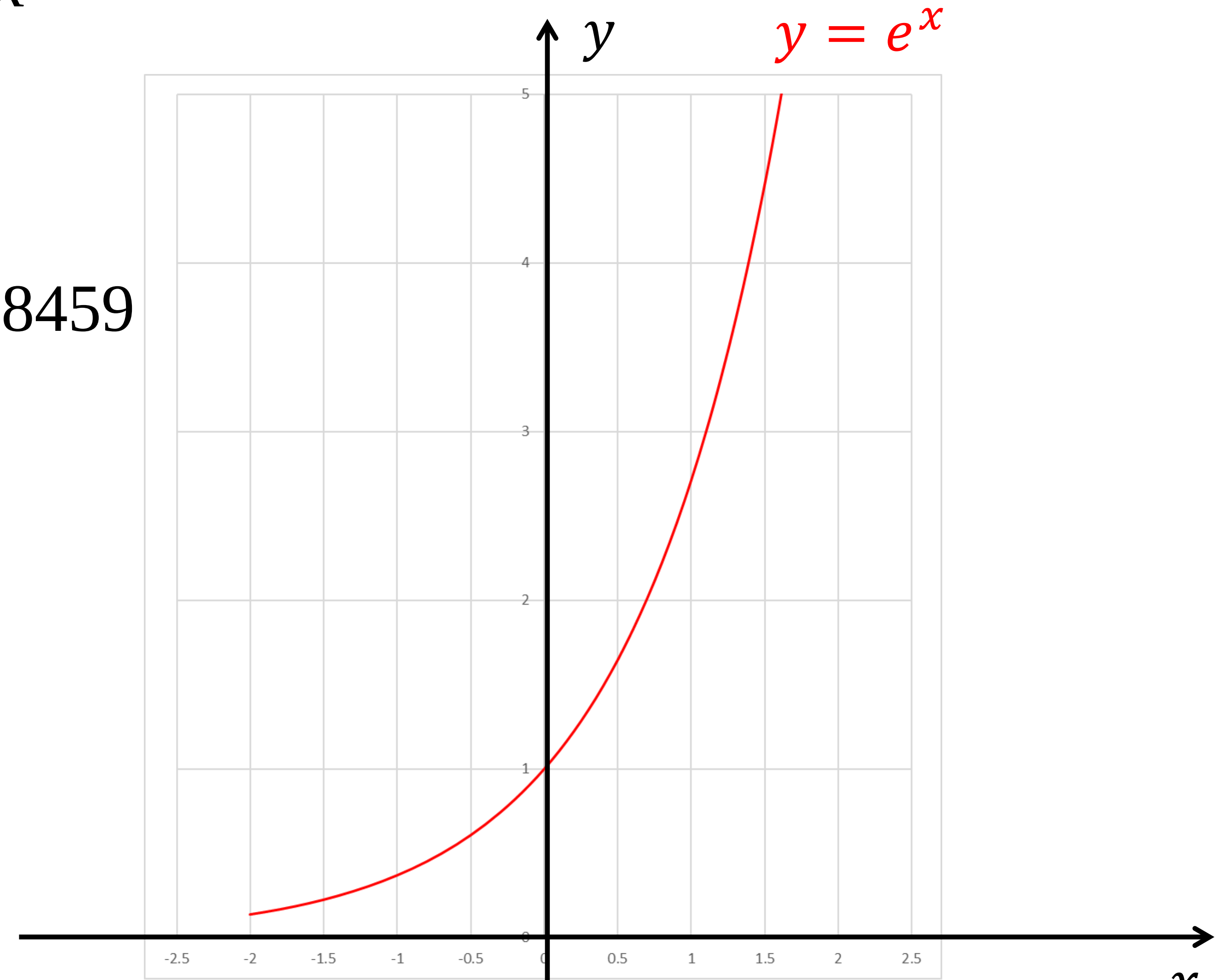
指数関数（４）

$$y = e^x$$

e:ネーピア数

$$e = 2.718281828459$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$



対数関数（１）

対数

$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$のとき，指数 x を a を底とする y の対数といい，$x = \log_a y$ とかく。このとき，y を対数 x の真数という。真数は常に正。

対数法則

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a 1 = 0$$

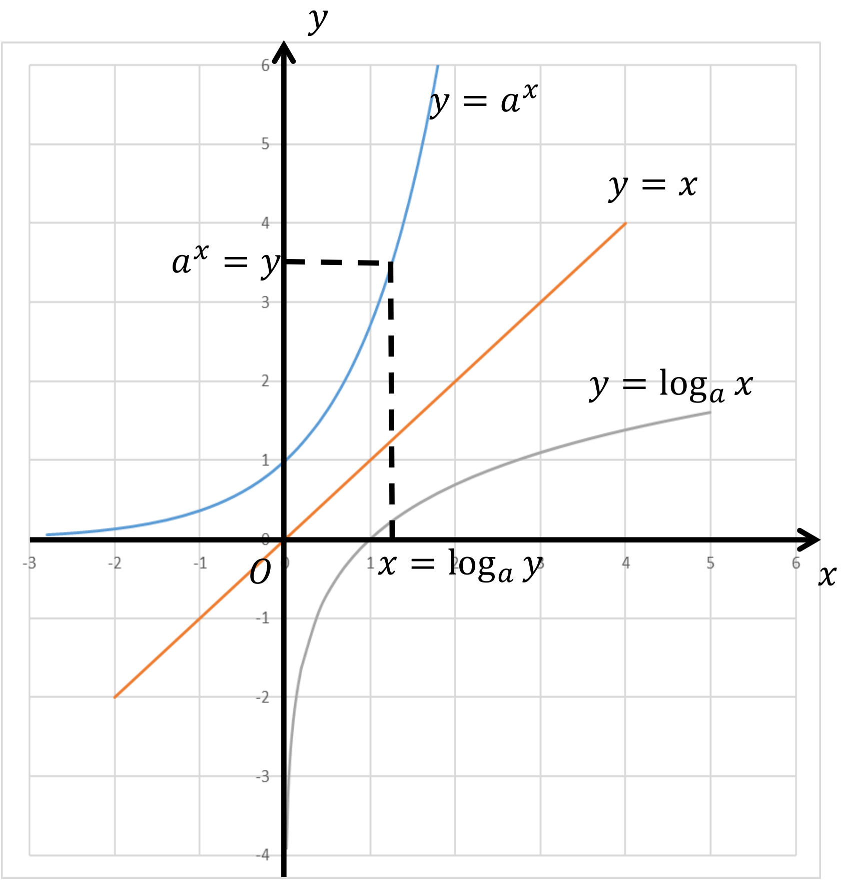
$$\log_a x^b = b \log_a x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

対数関数（２）

指数関数 $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ の逆関数を $y = \log_a x$ で表わし，対数関数と呼ぶ

とくに，$a = e$ の場合は，自然対数と呼ばれ，単に，$y = \log x$ とかく

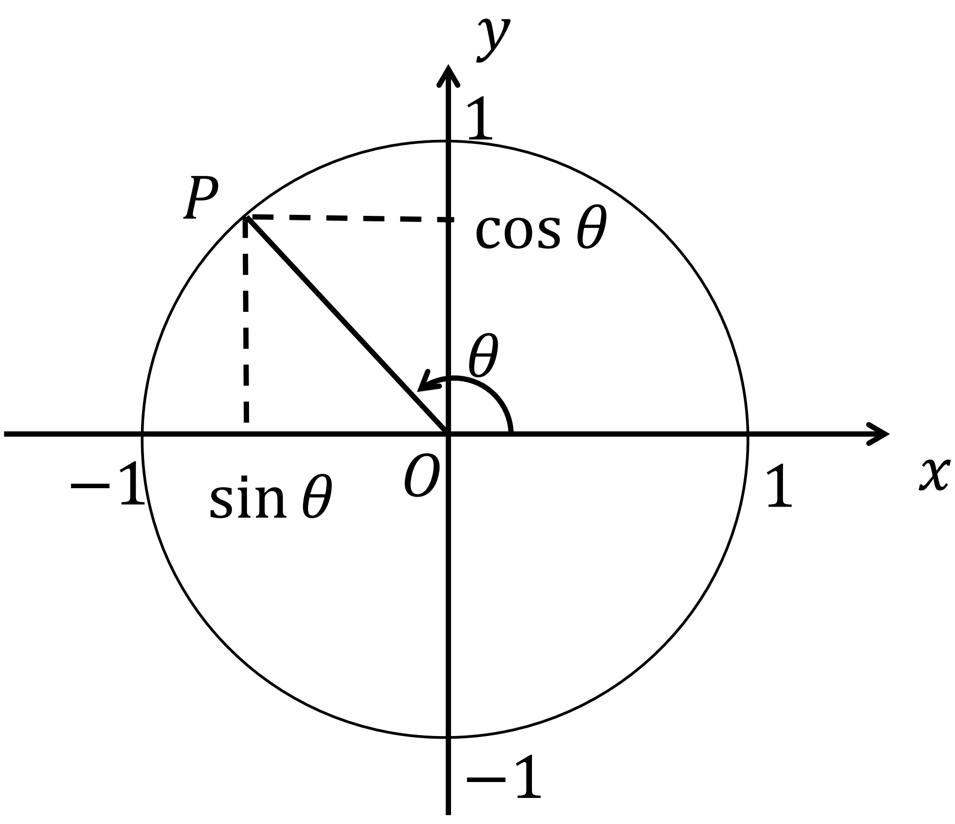


三角関数（１）

点Pのx座標が$\cos\theta$

点Pのy座標が$\sin\theta$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



$$360^\circ = 2\pi$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

三角関数（２）

三角関数に関する公式

相互関係

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

周期性

$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta \qquad \sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$$

加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

負角の公式

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

三角関数（３）

三角関数に関する公式

2倍角の公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

3倍角の公式

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$